УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я.721
Г 36

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Юдина И. И. **Геометрия. 7 класс.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 120 с. — ISBN 5-9221-0572-8.

Настоящее издание является первой частью учебно-методического пособия, содержащего решения задач из учебника «Геометрия 7–9» Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной (М.: Просвещение, 1990 и последующие издания). Данный выпуск содержит решения задач, относящихся к 7 классу.

ISBN 5-9221-0572-8

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# Предисловие

Настоящее издание является первой частью учебно-методического пособия, содержащего решения задач из учебника «Геометрия 7–9» Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.Г. Позняка, И.И. Юдиной (М.: Просвещение, 1990 и последующие издания). Данный выпуск содержит решения задач, относящихся к 7 классу; в последующих двух выпусках будут представлены решения задач, относящихся к 8 и 9 классам.

Нумерация задач в пособии такая же, как в учебнике издания 2000 года и последующих изданиях. Вслед за формулировкой задачи дается ее решение. В каждой главе приведены решения всех задач к параграфам (за исключением большинства практических заданий), затем — решения дополнительных задач и после этого — решения задач повышенной трудности.

Приведенные решения не следует рассматривать как образец, которого нужно придерживаться при оформлении решений задач. Так, например, мы не разбиваем решение задачи на отдельные занумерованные пункты, хотя вполне допускаем, что учитель в своей практике может это делать, акцентируя тем самым внимание учащихся на последовательных шагах в решении задачи.

Большинство решений снабжено рисунками. Это относится в первую очередь к задачам первой и второй глав. В дальнейшем, в особенности при решении задач четвертой главы, рисунки даются не всегда. Для простых задач решения часто приведены без рисунка. Это также не следует рассматривать как обязательное правило. Читатель по своему усмотрению может снабдить рисунками решения и таких задач.

Остановимся особо на задачах первой главы, в которых отрабатываются основные понятия и свойства простейших геометрических фигур — точек, прямых, отрезков, лучей, углов. На наш взгляд, при решении этих задач следует опираться прежде всего на наглядные представления основных понятий. Отметим в связи с этим, что в первой главе учебника «Геометрия 7–9» не вводится понятие аксиомы и сами аксиомы не формулируются, а необходимые определения и исходные положения приведены в описательной форме на основе наглядных представлений. Этим и следует руководствоваться при решении задач первой главы.

*Авторы*

Глава 1

# НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

## § 1. Прямая и отрезок

**3.** Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи.

Решение. Проведем сначала две прямые $a$ и $b$, обозначим буквой $O$ точку их пересечения. Проведем теперь третью прямую $c$. Возможны два случая: а) прямая $c$ не проходит через точку $O$. Тогда она пересекает прямые $a$ и $b$ в точках $A$ и $B$. Таким образом, получилось три точки: $O$, $A$, $B$ (рис. 1); б) прямая $c$ проходит через точку $O$. Получилась всего одна точка $O$ (рис. 2).

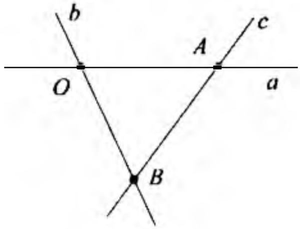


Рис. 1

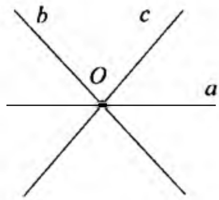


Рис. 2

Ответ. Возможны два случая: три точки и одна точка.

**6.** Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько отрезков получилось на прямой?

Решение. На рисунке 3 проведена прямая и на ней отмечены три точки $A$, $B$ и $C$. Каждые две из этих точек определяют отрезок с концами в этих точках. Поэтому на прямой получилось три отрезка: $AB$, $AC$ и $BC$.

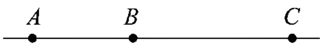


Рис. 3

Ответ. Три отрезка.

## § 2. Луч и угол

**8.** Проведите прямую, отметьте на ней точки $A$ и $B$ и на отрезке $AB$ отметьте точку $C$. а) Среди лучей $AB$, $BC$, $CA$, $AC$ и $BA$ найдите пары совпадающих лучей; б) назовите луч, который является продолжением луча $CA$.

Решение. На рисунке 4 изображен отрезок $AB$ и на этом отрезке — точка $C$. а) Лучи совпадают, если они лежат на одной прямой, имеют общее начало и ни один из них не является продолжением другого луча. Лучи $AB$ и $AC$ удовлетворяют этим условиям, поэтому они совпадают. Точно так же совпадают лучи $BC$ и $BA$. б) Луч $CB$ является продолжением луча $CA$, так как лучи $CB$ и $CA$ лежат на одной прямой, имеют общее начало и не совпадают.

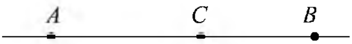


Рис. 4

Ответ. а) Лучи $AB$ и $AC$, а также $BC$ и $BA$; б) луч $CB$.

**11.** Начертите три луча $h$, $k$, и $l$ с общим началом. Назовите все углы, образованные этими лучами.

Решение. На рисунке 5 изображены три луча $h$, $k$ и $l$ с общим началом $O$. Эти лучи образуют три угла: $\angle hk$, $\angle hl$ и $\angle kl$.

Ответ. $\angle hk$, $\angle hl$ и $\angle kl$.

**14.** Начертите неразвернутый угол $AOB$ и проведите: а) луч $OC$, который делит угол $AOB$ на два угла; б) луч $OD$, который не делит угол $AOC$ на два угла.

Решение. На рисунке 6 изображен угол $AOB$. а) Проведем какой-нибудь луч $OC$, который исходит из вершины $O$ угла $AOB$ и проходит внутри этого угла. Луч $OC$ делит угол $AOB$ на два угла. б) Луч $OD$ на рисунке 6 не делит угол $AOC$ на два угла, так как он не проходит внутри этого угла.

**15.** Сколько неразвернутых углов образуется при пересечении двух прямых?

Решение. Пусть прямые $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$ (рис. 7). Образуются четыре неразвернутых угла: $AOC$, $AOD$, $BOC$ и $BOD$.

Ответ. Четыре угла.

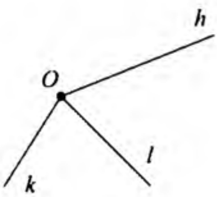


Рис. 5

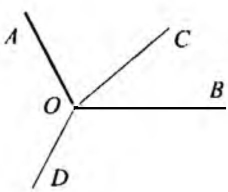


Рис. 6

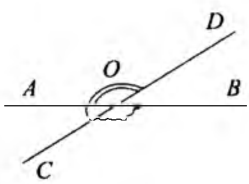


Рис. 7

**17.** Какие из лучей, изображенных на рисунке 8 (рис. 18 учебника), делят угол $AOB$ на два угла?

Решение. Лучи $h$, $k$, $l$, $m$ и $n$ исходят из вершины $O$ угла $AOB$, но только два из них — лучи $h$ и $l$ — проходят внутри этого угла, поэтому только лучи $h$ и $l$ делят угол $AOB$ на два угла.

Ответ. Лучи $h$ и $l$.

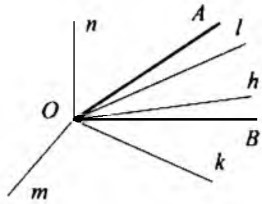

Рис. 8

## § 3. Сравнение отрезков и углов

**18.** На луче с началом $O$ отмечены точки $A$, $B$ и $C$ так, что точка $B$ лежит между точками $O$ и $A$, а точка $A$ — между точками $O$ и $C$. Сравните отрезки $OB$ и $OA$, $OC$ и $OA$, $OB$ и $OC$.

Решение. 1. Сравним отрезки $OB$ и $OA$. По условию задачи точка $B$ лежит между точками $O$ и $A$ (рис. 9). Значит, отрезок $OB$ составляет часть отрезка $OA$, поэтому $OB < OA$.

Рис. 9

2. Сравним отрезки $OC$ и $OA$. Точка $A$ лежит между точками $O$ и $C$. Значит, отрезок $OA$ составляет часть отрезка $OC$, поэтому $OA < OC$ и, следовательно, $OC > OA$.

3. Сравним отрезки $OB$ и $OC$. По доказанному $OB < OA$, а $OA < OC$, следовательно, $OB < OC$.

Ответ. $OB < OA$, $OC > OA$, $OB < OC$.

**19.** Точка $O$ является серединой отрезка $AB$. Можно ли совместить наложением отрезки: а) $OA$ и $OB$; б) $OA$ и $AB$?

Решение. а) По условию задачи точка $O$ — середина отрезка $AB$. Отсюда следует, что отрезки $OA$ и $OB$ равны и поэтому их можно совместить наложением.

б) Отрезок $OA$ наложен на отрезок $AB$ так, что они имеют общий конец $A$, но два других конца этих отрезков — точки $O$ и $B$ — не совмещены. Отсюда следует, что отрезки $OA$ и $AB$ не равны и поэтому их нельзя совместить наложением.

Ответ. а) Да; б) нет.

**21.** Луч $OC$ делит угол $AOB$ на два угла. Сравните углы $AOB$ и $AOC$.

Решение. Так как луч $OC$ делит угол $AOB$ на два угла, то угол $AOC$ составляет часть угла $AOB$. Отсюда следует, что угол $AOC$ меньше угла $AOB$.

Ответ. $\angle AOC < \angle AOB$.

**22.** Луч $l$ — биссектриса угла $hk$. Можно ли наложением совместить углы: а) $hl$ и $lk$; б) $hl$ и $hk$?

Решение. а) По условию задачи луч $l$ — биссектриса угла $hk$. Отсюда следует, что углы $hl$ и $lk$ равны и поэтому их можно совместить наложением.

б) Так как луч $l$ — биссектриса угла $hk$, то он делит угол $hk$ на два угла. Согласно задаче 21 $\angle hl < \angle hk$. Таким образом, углы $hl$ и $hk$ не равны и поэтому их нельзя совместить наложением.

Ответ. а) Да; б) нет.

## § 4. Измерение отрезков

**26.** Найдите длины всех отрезков, изображенных на рисунке 10 (рис. 31 учебника), если за единицу измерения принят отрезок: а) $KL$; б) $AB$.

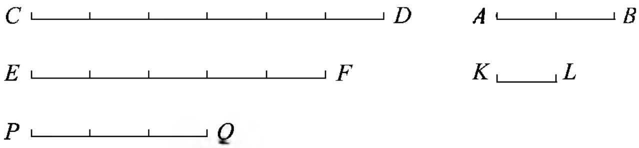


Рис. 10

Решение. а) Так как $KL$ — единица измерения, то $KL = 1$.

В отрезке $AB$ отрезок $KL$ укладывается два раза, поэтому $AB = 2$. Аналогично, $PQ = 3$, $EF = 5$, $CD = 6$.

б) Так как $AB$ — единица измерения, то $AB = 1$. Половина отрезка $AB$ укладывается в отрезке $KL$ один раз, поэтому $KL = \frac{1}{2}$. В отрезке $PQ$ отрезок $AB$ укладывается один раз, и в остатке половина отрезка $AB$ укладывается также один раз, поэтому $PQ = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$. Аналогично, $EF = 2\frac{1}{2}$, $CD = 3$.

Ответ. а) $KL = 1$, $AB = 2$, $PQ = 3$, $EF = 5$, $CD = 6$; б) $KL = \frac{1}{2}$, $AB = 1$, $PQ = 1\frac{1}{2}$, $EF = 2\frac{1}{2}$, $CD = 3$.

**29.** Начертите прямую $AB$. С помощью масштабной линейки отметьте на этой прямой точку $C$, такую, что $AC = 2$ см. Сколько таких точек можно отметить на прямой $AB$?

Решение. На прямой $AB$ из точки $A$ исходят два луча — луч $AB$ и луч $AB_1$, являющийся продолжением луча $AB$. На каждом из этих лучей можно отметить только одну точку — точку $C$ на луче $AB$ и точку $C_1$ на луче $AB_1$ — так, чтобы $AC = 2$ см и $AC_1 = 2$ см. Следовательно, на прямой $AB$ можно отметить две такие точки.

Ответ. Две точки.

**30.** Точка $B$ делит отрезок $AC$ на два отрезка. Найдите длину отрезка $AC$, если $AB = 7{,}8$ см, $BC = 25$ мм.

Решение. Так как точка $B$ делит отрезок $AC$ на два отрезка $AB$ и $BC$, то $AC = AB + BC$. По условию $AB = 7{,}8$ см, $BC = 25$ мм $= 2{,}5$ см, поэтому $AC = 7{,}8$ см $+ 2{,}5$ см $= 10{,}3$ см.

Ответ. 10,3 см.

**31.** Точка $B$ делит отрезок $AC$ на два отрезка. Найдите длину отрезка $BC$, если: а) $AB = 3{,}7$ см, $AC = 7{,}2$ см; б) $AB = 4$ мм, $AC = 4$ см.

Решение. Так как точка $B$ делит отрезок $AC$ на два отрезка: $AB$ и $BC$, то $AC = AB + BC$. Отсюда следует, что $BC = AC - AB$.

а) По условию $AC = 7{,}2$ см, $AB = 3{,}7$ см, поэтому $BC = 7{,}2$ см $-$ $- 3{,}7$ см $= 3{,}5$ см.

б) По условию $AC = 4$ см $= 40$ мм, $AB = 4$ мм, поэтому $BC = 40$ мм $- 4$ мм $= 36$ мм.

Ответ. а) 3,5 см; б) 36 мм.

**32.** Точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 12$ см, $BC = 13{,}5$ см. Какой может быть длина отрезка $AC$?

Решение. Возможны два случая.

а) Точка $C$ лежит на луче $BA$ (рис. 11, *а*). В этом случае

$$AC = BC - BA = 13{,}5 \text{ см} - 12 \text{ см} = 1{,}5 \text{ см}.$$

б) Точка $C$ лежит на продолжении луча $AB$ (рис. 11, *б*). В этом случае $AC = AB + BC = 12$ см $+ 13{,}5$ см $= 25{,}5$ см.

Ответ. 1,5 см или 25,5 см.

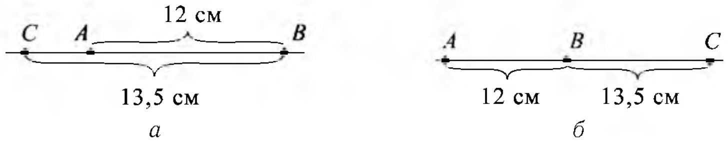


Рис. 11

**33.** Точки $B$, $D$ и $M$ лежат на одной прямой. Известно, что $BD = 7$ см, $MD = 16$ см. Каким может быть расстояние $BM$?

Решение. Возможны два случая.

а) Лучи $DB$ и $DM$ совпадают (рис. 12, *а*). В этом случае $BM = DM - DB = 16$ см $- 7$ см $= 9$ см.

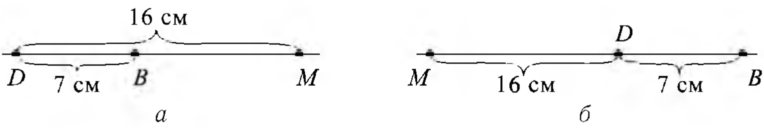


Рис. 12

б) Лучи $DB$ и $DM$ не совпадают, и, следовательно, точка $M$ лежит на продолжении луча $DB$ (рис. 12, *б*). В этом случае $BM = BD + DM = 7$ см $+ 16$ см $= 23$ см.

Ответ. 9 см или 23 см.

**34.** Точка $C$ — середина отрезка $AB$, равного 64 см. На луче $CA$ отмечена точка $D$ так, что $CD = 15$ см. Найдите длины отрезков $BD$ и $DA$.

Решение. Так как точка $C$ — середина отрезка $AB$ и $AB = 64$ см, то $CA = CB = 32$ см. По условию точка $D$ лежит на луче $CA$,


Рис. 13

и так как $CD = 15$ см, $CA = 32$ см, то $CD < CA$, и поэтому точка $D$ делит отрезок $AC$ на два отрезка: $CD$ и $DA$ (рис. 13). Следовательно,

$$DA = CA - CD = 32 \text{ см} - 15 \text{ см} = 17 \text{ см};$$
$$BD = CD + CB = 15 \text{ см} + 32 \text{ см} = 47 \text{ см}.$$

Ответ. $BD = 47$ см, $DA = 17$ см.

**35.** Расстояние между Москвой и С.-Петербургом равно 650 км. Город Тверь находится между Москвой и С.-Петербургом в 170 км от Москвы. Найдите расстояние между Тверью и С.-Петербургом, считая, что все три города расположены на одной прямой.

Решение. Пусть $M$ — Москва, $T$ — Тверь, $P$ — С.-Петербург. По условию задачи точка $T$ лежит между точками $M$ и $P$, поэтому $MT + TP = MP$. Так как $MP = 650$ км, $MT = 170$ км, то $TP = MP - MT = 480$ км.

Ответ. 480 км.

**37.** Точка $C$ — середина отрезка $AB$, точка $O$ — середина отрезка $AC$. а) Найдите $AC$, $CB$, $AO$ и $OB$, если $AB = 2$ см; б) найдите $AB$, $AC$, $AO$ и $OB$, если $CB = 3{,}2$ м.

Решение. На рисунке 14 изображены данный отрезок $AB$ и данные точки $C$ и $O$.

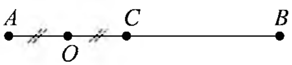


Рис. 14

а) Так как точка $C$ — середина отрезка $AB$ и $AB = 2$ см, то $AC = CB = 1$ см.

Точка $O$ — середина отрезка $AC$, поэтому $AO = OC = \frac{1}{2}AC = 0{,}5$ см.

$$OB = OC + CB = 1{,}5 \text{ см}.$$

б) $CB = 3{,}2$ м, поэтому $AB = 2CB = 6{,}4$ м, $AC = CB = 3{,}2$ м, $OC = AO = \frac{1}{2}AC = 1{,}6$ м, $OB = OC + CB = 1{,}6$ м $+ 3{,}2$ м $= 4{,}8$ м.

Ответ. а) $AC = 1$ см, $CB = 1$ см, $AO = 0{,}5$ см, $OB = 1{,}5$ см; б) $AB = 6{,}4$ м, $AC = 3{,}2$ м, $AO = 1{,}6$ м, $OB = 4{,}8$ м.

**38.** На прямой отмечены точки $O$, $A$ и $B$ так, что $OA = 12$ см, $OB = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков $OA$ и $OB$, если точка $O$: а) лежит на отрезке $AB$; б) не лежит на отрезке $AB$.

Решение. Пусть $M$ и $N$ — середины отрезков $OA$ и $OB$.

а) Если точка $O$ лежит на отрезке $AB$ (рис. 15, *а*), то $MN = MO + ON$. Но $MO = \frac{1}{2}OA = 6$ см, $ON = \frac{1}{2}OB = 4{,}5$ см, следовательно, $MN = 10{,}5$ см.

б) Пусть точка $O$ не лежит на отрезке $AB$ (рис. 15, *б*). Так как


*а* *б*

Рис. 15

$OM = \frac{1}{2}OA = 6$ см, $ON = \frac{1}{2}OB = 4{,}5$ см, то $ON < OM$, и поэтому точка $N$ лежит на отрезке $OM$. Следовательно, $MN = OM - ON = 6$ см $- 4{,}5$ см $= 1{,}5$ см.

Ответ. а) 10,5 см; б) 1,5 см.

**39.** Отрезок, длина которого равна $a$, разделен произвольной точкой на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.

Решение. На рисунке 16 на отрезке $AB$ длины $a$ отмечена произвольная точка $O$, точки $M$ и $N$ — середины отрезков $AO$ и $OB$. Поэтому

$$MO = \frac{1}{2}AO, \quad ON = \frac{1}{2}OB.$$

$$MN = MO + ON = \frac{1}{2}(AO + OB) = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}.$$

Ответ. $\frac{a}{2}$.

**40.** Отрезок, равный 28 см, разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

Решение. Пусть отрезок $AB$ равен 28 см, а точки $C$ и $D$ делят его на три неравных отрезка: $AC$, $CD$ и $DB$ (рис. 17). Пусть точка

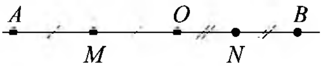


Рис. 16

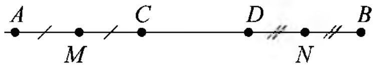


Рис. 17

$M$ — середина отрезка $AC$, точка $N$ — середина отрезка $BD$. Тогда $AB = AC + CD + DB$, поэтому

$$AC + CD + DB = 28 \text{ см}. \qquad (1)$$

$$MN = MC + CD + DN = \frac{1}{2}AC + CD + \frac{1}{2}DB = 16 \text{ см, откуда}$$

$$AC + 2CD + DB = 32 \text{ см.} \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем: $CD = 4$ см.

О т в е т. 4 см.

## § 5. Измерение углов

**44.** Начертите угол $AOB$ и с помощью транспортира проведите луч $OC$ так, чтобы луч $OA$ являлся биссектрисой угла $BOC$. Всегда ли это выполнимо?

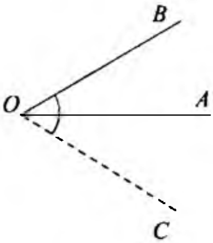


Рис. 18

Р е ш е н и е. Предположим, что можно провести луч $OC$ так, чтобы луч $OA$ являлся биссектрисой угла $BOC$ (рис. 18). Тогда $\angle BOC \leqslant 180°$. Так как $OA$ — биссектриса угла $BOC$, то $\angle BOC = \angle AOB + \angle COA = 2\angle AOB$.

Следовательно, $\angle AOB \leqslant 90°$, т. е. угол $AOB$ острый или прямой. Отсюда следует, что если угол $AOB$ тупой, то построение луча $OC$ невыполнимо.

О т в е т. Нет. Построение выполнимо, когда угол $AOB$ — острый или прямой.

**45.** Градусные меры двух углов равны. Равны ли сами углы?

Р е ш е н и е. Предположим, что данные углы не равны, тогда один из них меньше другого, и, следовательно, градусная мера одного угла меньше градусной меры другого угла, что противоречит условию задачи. Следовательно, два угла, имеющие равные градусные меры, равны.

О т в е т. Да.

**47.** Луч $OE$ делит угол $AOB$ на два угла. Найдите $\angle AOB$, если: а) $\angle AOE = 44°$, $\angle EOB = 77°$; б) $\angle AOE = 12°37'$, $\angle EOB = 108°25'$.

Р е ш е н и е. По условию луч $OE$ делит угол $AOB$ на два угла: $AOE$ и $EOB$, поэтому $\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB$.

а) $\angle AOB = 44° + 77° = 121°$.

б) $\angle AOB = 12°37' + 108°25' = 121°2'$.

О т в е т. а) $121°$; б) $121°2'$.

**48.** Луч $OC$ делит угол $AOB$ на два угла. Найдите угол $COB$, если $\angle AOB = 78°$, а угол $AOC$ на $18°$ меньше угла $BOC$.

Р е ш е н и е. Луч $OC$ делит угол $AOB$ на два угла: $AOC$ и $COB$, поэтому $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$, откуда

$$\angle COB = \angle AOB - \angle AOC. \qquad (1)$$

По условию задачи

$$\angle AOB = 78^\circ, \quad \angle AOC = \angle COB - 18^\circ.$$

Подставим эти значения в равенство (1):

$$\angle COB = 78^\circ - (\angle COB - 18^\circ) = 96^\circ - \angle COB.$$

Отсюда $2\angle COB = 96^\circ$, $\angle COB = 48^\circ$.
Ответ. $48^\circ$.

**49.** Луч $OC$ делит угол $AOB$ на два угла. Найдите угол $AOC$, если $\angle AOB = 155^\circ$ и угол $AOC$ на $15^\circ$ больше угла $COB$.

Решение. Задача решается так же, как и задача 48.

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB,$$

поэтому

$$\angle AOC = \angle AOB - \angle COB. \tag{1}$$

По условию задачи $\angle COB = \angle AOC - 15^\circ$, $\angle AOB = 155^\circ$. Подставим эти значения в равенство (1):

$$\angle AOC = 155^\circ - (\angle AOC - 15^\circ).$$

Отсюда следует, что $\angle AOC = 85^\circ$.
Ответ. $85^\circ$.

**50.** Угол $AOB$ является частью угла $AOC$. Известно, что $\angle AOC = 108^\circ$, $\angle AOB = 3\angle BOC$. Найдите угол $AOB$.

Решение. Так как угол $AOB$ — часть угла $AOC$, то луч $OB$ делит угол $AOC$ на два угла: $AOB$ и $BOC$. Поэтому

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC. \tag{1}$$

По условию задачи

$$\angle AOC = 108^\circ, \quad \angle AOB = 3\angle BOC.$$

Подставим эти значения в равенство (1):

$$108^\circ = 3\angle BOC + \angle BOC.$$

Отсюда следует, что

$$\angle BOC = 27^\circ, \text{ а } \angle AOB = 3\angle BOC = 81^\circ.$$

Ответ. $81^\circ$.

**51.** На рисунке 19 (рис. 38 учебника) угол $AOD$ — прямой, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов $AOB$ и $COD$.

Решение. По условию задачи угол $AOD$, равный $90^\circ$, разделен лучами $OB$ и $OC$ на три равных угла: $AOB$, $BOC$, $COD$. Следовательно, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 30^\circ$.

Пусть $OX$ и $OY$ — биссектрисы углов $AOB$ и $COD$ (см. рис. 19). Тогда $\angle XOB = 15°$ и $\angle YOC = 15°$. Угол $XOY$ лучами $OB$ и $OC$ разделен на три угла: $XOB$, $BOC$, $COY$, поэтому $\angle XOY = \angle XOB + \angle BOC + \angle COY = 15° + 30° + 15° = 60°$.

Ответ. $60°$.

**52.** На рисунке 20 (рис. 39 учебника) луч $OV$ является биссектрисой угла $ZOY$, а луч $OU$ — биссектрисой угла $XOY$. Найдите угол $XOZ$, если $\angle UOV = 80°$.

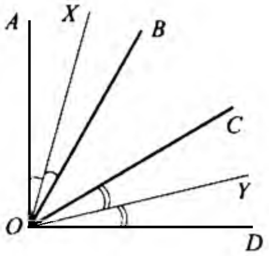


Рис. 19

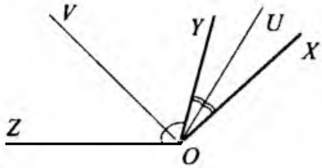


Рис. 20

Решение. Так как лучи $OV$ и $OU$ — биссектрисы углов $ZOY$ и $XOY$, то

$$\angle ZOY = 2\angle VOY, \quad XOY = 2\angle YOU.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\angle ZOY + \angle XOY = 2(\angle VOY + \angle YOU) = 2\angle UOV = 160°.$$

Но $\angle ZOY + \angle XOY = \angle XOZ$, поэтому $\angle XOZ = 160°$.

Ответ. $160°$.

**53.** Луч $l$ является биссектрисой неразвернутого угла $hk$. Может ли угол $hl$ быть прямым или тупым?

Решение. Так как луч $l$ — биссектриса угла $hk$, то $\angle hl = \frac{1}{2}\angle hk$. По условию задачи угол $hk$ — неразвернутый, поэтому $\angle hk < 180°$. Отсюда следует, что $\angle hl < 90°$. Таким образом, угол $hl$ не может быть прямым или тупым.

Ответ. Нет.

## § 6. Перпендикулярные прямые

**58.** Найдите угол, смежный с углом $ABC$, если: а) $\angle ABC = 111°$; б) $\angle ABC = 90°$; в) $\angle ABC = 15°$.

Решение. Пусть $\angle CBD$ — угол, смежный с углом $ABC$. По свойству смежных углов $\angle ABC + \angle CBD = 180^\circ$, следовательно,

$$\angle CBD = 180^\circ - \angle ABC.$$

Подставляя в эту формулу значения $\angle ABC$ из условий задачи, получаем градусную меру угла $CBD$, смежного с углом $ABC$:

а) $\angle CBD = 180^\circ - 111^\circ = 69^\circ$,
б) $\angle CBD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,
в) $\angle CBD = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.

Ответ. а) $69^\circ$; б) $90^\circ$; в) $165^\circ$.

**59.** Один из смежных углов прямой. Каким (острым, прямым, тупым) является другой угол?

Решение. Пусть $\angle hl$ и $\angle lk$ — смежные углы и $\angle hl = 90^\circ$. По свойству смежных углов $\angle hl + \angle lk = 180^\circ$. Отсюда имеем: $\angle lk = 180^\circ - \angle hl = 90^\circ$, т. е. $\angle lk$ — прямой угол.

Итак, если один из смежных углов прямой, то и другой угол прямой.

Ответ. Прямым.

**60.** Верно ли утверждение: если смежные углы равны, то они прямые?

Решение. Сумма смежных углов равна $180^\circ$, поэтому, если они равны, каждый из этих углов равен $90^\circ$, и, следовательно, эти углы прямые.

Ответ. Да.

**61.** Найдите смежные углы $hk$ и $kl$, если: а) $\angle hk$ меньше $\angle kl$ на $40^\circ$; б) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $120^\circ$; в) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $47^\circ 18'$; г) $\angle hk = 3\angle kl$; д) $\angle hk : \angle kl = 5 : 4$.

Решение. Углы $hk$ и $kl$ — смежные, поэтому

$$\angle hk + \angle kl = 180^\circ. \qquad (1)$$

а) По условию $\angle hk = \angle kl - 40^\circ$. По формуле (1)

$$(\angle kl - 40^\circ) + \angle kl = 180^\circ.$$

Отсюда имеем:

$$\angle kl = 110^\circ, \quad \angle hk = 110^\circ - 40^\circ = 70^\circ.$$

б) $\angle hk = \angle kl + 120^\circ$. По формуле (1)

$$(\angle kl + 120^\circ) + \angle kl = 180^\circ,$$

откуда $\angle kl = 30^\circ$, $\angle hk = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ$.

в) $\angle hk = \angle kl + 47^\circ 18'$. По формуле (1)

$$(\angle kl + 47^\circ 18') + \angle kl = 180^\circ,$$

откуда $2\angle kl = 132^\circ 42'$, $\angle kl = 66^\circ 21'$, $\angle hk = 66^\circ 21' + 47^\circ 18' = 113^\circ 39'$.

г) $\angle hk = 3\angle kl$. По формуле (1)

$$3\angle kl + \angle kl = 180^\circ,$$

откуда $\angle kl = 45^\circ$, $\angle hk = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$.

д) $\angle hk : \angle kl = \frac{5}{4}$, поэтому $\angle hk = \frac{5}{4}\angle kl$. По формуле (1)

$$\frac{5}{4}\angle kl + \angle kl = 180^\circ.$$

Отсюда получаем: $\angle kl = 80^\circ$, $\angle hk = \frac{5}{4} \cdot 80^\circ = 100^\circ$.

Ответ. а) $70^\circ$ и $110^\circ$; б) $150^\circ$ и $30^\circ$; в) $113^\circ 39'$ и $66^\circ 21'$; г) $135^\circ$ и $45^\circ$; д) $100^\circ$ и $80^\circ$.

**62.** На рисунке 21 (рис. 46 учебника) углы $BOD$ и $COD$ равны. Найдите угол $AOD$, если $\angle COB = 148^\circ$.

Решение. Углы $AOC$ и $COB$ — смежные, поэтому $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$. Отсюда находим: $\angle AOC = 180^\circ - \angle COB = 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$.

Так как $OD$ — биссектриса угла $COB$ и $\angle COB = 148^\circ$, то $\angle COD = \frac{1}{2}\angle COB = 74^\circ$.

$$\angle AOD = \angle AOC + \angle COD = 32^\circ + 74^\circ = 106^\circ.$$

Ответ. $106^\circ$.

**63.** Даны два равных угла. Равны ли смежные с ними углы?

Решение. Пусть $\angle 1 = \angle 2$, а $\angle 3$ и $\angle 4$ — соответственно смежные с ними углы. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$. Так как $\angle 1 = \angle 2$, то из этих равенств следует, что $\angle 3 = \angle 4$. Следовательно, если данные углы равны, то смежные с ними углы также равны.

Ответ. Да.

**64.** На рисунке 22 (рис. 41 учебника) найдите углы: а) 1, 3, 4, если $\angle 2 = 117^\circ$; б) 1, 2, 4, если $\angle 3 = 43^\circ 27'$.

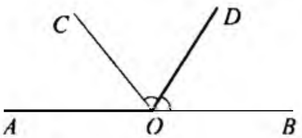


Рис. 21

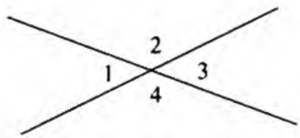


Рис. 22

Решение. а) Углы 1 и 2 смежные, поэтому $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Так как по условию $\angle 2 = 117^\circ$, то $\angle 1 = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$.

Углы 3 и 1 вертикальные, поэтому $\angle 3 = \angle 1 = 63°$.

Углы 4 и 2 вертикальные, следовательно, $\angle 4 = \angle 2 = 117°$.

б) Углы 1 и 3 вертикальные, поэтому $\angle 1 = \angle 3 = 43°27'$.

Углы 2 и 3 смежные, поэтому $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Отсюда находим: $\angle 2 = 180° - 43°27' = 136°33'$.

Углы 4 и 2 вертикальные, поэтому $\angle 4 = \angle 2 = 136°33'$.

Ответ: а) $\angle 1 = \angle 3 = 63°$, $\angle 4 = 117°$; б) $\angle 1 = 43°27'$, $\angle 2 = \angle 4 = 136°33'$.

**65.** Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если: а) сумма двух из них равна 114°; б) сумма трех углов равна 220°.

Решение. При пересечении двух прямых образуются четыре неразвернутых угла, которые на рисунке 22 обозначены цифрами 1, 2, 3 и 4.

а) Так как сумма двух из этих углов равна 114°, то они не могут быть смежными, а значит, эти углы — вертикальные, например, углы 1 и 3.

По свойству вертикальных углов $\angle 1 = \angle 3$, поэтому $\angle 1 = \angle 3 = 114° : 2 = 57°$.

Углы 2 и 1 смежные, следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, откуда $\angle 2 = 180° - 57° = 123°$.

По свойству вертикальных углов $\angle 4 = \angle 2$, поэтому $\angle 4 = 123°$.

б) Пусть, например, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 220°$. Так как углы 1 и 2 смежные, то $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и, следовательно, $\angle 3 = 220° - 180° = 40°$.

$\angle 3 + \angle 2 = 180°$, откуда $\angle 2 = 180° - 40° = 140°$.

$$\angle 1 = \angle 3 = 40°, \quad \angle 4 = \angle 2 = 140°.$$

Ответ. а) 57°, 123°, 57°, 123°; б) 40°, 140°, 40°, 140°.

**66.** На рисунке 22 (рис. 41 учебника) найдите углы 1, 2, 3, 4, если: а) $\angle 2 + \angle 4 = 220°$; б) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$; в) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$.

Решение. а) По условию $\angle 2 + \angle 4 = 220°$. Эти углы вертикальные, поэтому $\angle 2 = \angle 4 = 110°$.

Углы 1 и 2 смежные, поэтому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, откуда $\angle 1 = 180° - 110° = 70°$.

Углы 3 и 1 вертикальные, поэтому $\angle 3 = \angle 1 = 70°$.

б) Углы 1 и 3, а также 2 и 4 вертикальные, поэтому $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 4 = \angle 2$. Подставив эти выражения в данное равенство, получим:

$$3(2\angle 1) = 2\angle 2,$$

или

$$3\angle 1 = \angle 2.$$

Углы 1 и 2 смежные, поэтому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Из этих двух равенств находим $\angle 1$ и $\angle 2$: $\angle 1 = 45°$, $\angle 2 = 135°$.

$\angle 3 = \angle 1$, поэтому $\angle 3 = 45°$; $\angle 4 = \angle 2$, поэтому $\angle 4 = 135°$.

в) По условию $\angle 2 - \angle 1 = 30°$. Эти углы смежные, следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Из этих двух равенств имеем: $\angle 1 = 75°$, $\angle 2 = 105°$.

$\angle 3 = \angle 1$, поэтому $\angle 3 = 75°$; $\angle 4 = \angle 2$, поэтому $\angle 4 = 105°$.

Ответ. а) $\angle 1 = \angle 3 = 70°$, $\angle 2 = \angle 4 = 110°$; б) $\angle 1 = \angle 3 = 45°$, $\angle 2 = \angle 4 = 135°$; в) $\angle 1 = \angle 3 = 75°$, $\angle 2 = \angle 4 = 105°$.

**67.** На рисунке 23 (рис. 47 учебника) изображены три прямые, пересекающиеся в точке $O$. Найдите сумму углов: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

Решение. Пусть $\angle 4$ и $\angle 1$ — вертикальные углы (см. рис. 23). Тогда по свойству вертикальных углов $\angle 4 = \angle 1$, поэтому $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 + \angle 3$. Сумма этих углов равна развернутому углу $AOB$, поэтому $\angle 2 + \angle 4 + \angle 3 = 180°$, а значит, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Ответ. $180°$.

**68.** На рисунке 24 (рис. 48 учебника) $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$. Найдите углы $AOC$, $BOD$, $COE$ и $COD$.

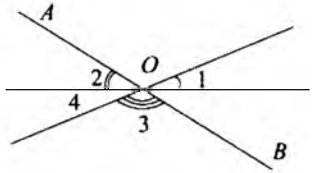


Рис. 23

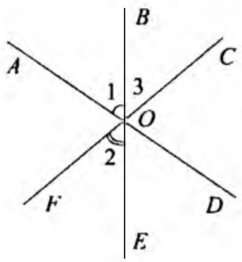


Рис. 24

Решение. Введем цифровые обозначения для углов (см. рис. 24). По условию $\angle 1 = 50°$, $\angle 2 = 70°$.

$\angle AOC = \angle 1 + \angle 3$. Углы 2 и 3 вертикальные, поэтому $\angle 3 = \angle 2$. Таким образом,

$$\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 120°.$$

Углы 1 и $BOD$ — смежные, поэтому $\angle BOD + \angle 1 = 180°$. Отсюда находим:

$$\angle BOD = 180° - 50° = 130°.$$

Углы 2 и $COE$ — смежные, поэтому $\angle 2 + \angle COE = 180°$, откуда

$$\angle COE = 180° - 70° = 110°.$$

Углы $COD$ и $AOC$ — смежные, поэтому $\angle COD + \angle AOC = 180°$, откуда

$$\angle COD = 180° - \angle 1 - \angle 3 = 180° - 50° - 70° = 60°.$$

Ответ. $\angle AOC = 120°$, $\angle BOD = 130°$, $\angle COE = 110°$, $\angle COD = 60°$.

**69.** Прямая $a$ пересекает стороны угла $A$ в точках $P$ и $Q$. Могут ли обе прямые $AP$ и $AQ$ быть перпендикулярными к прямой $a$?

Решение. Обе прямые $AP$ и $AQ$ не могут быть перпендикулярными к прямой $a$, так как они пересекаются в точке $A$, а две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются (п. 12 учебника).

Ответ. Нет.

**70.** Через точку $A$, не лежащую на прямой $a$, проведены три прямые, которые пересекают прямую $a$. Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой $a$.

Решение. Пусть $AP$, $AQ$ и $AR$ — прямые, пересекающие прямую $a$ в точках $P$, $Q$ и $R$. Допустим, что прямая $AP$ перпендикулярна к прямой $a$ (см. рис. 25). Тогда прямая $AQ$ не может быть перпендикулярной к прямой $a$, так как две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются, а прямые $AP$ и $AQ$ пересекаются в точке $A$. Аналогично, прямая $AR$ не перпендикулярна к прямой $a$.

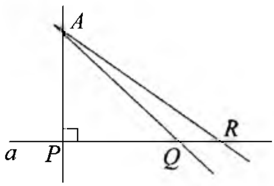

Рис. 25

Таким образом, по крайней мере две из трех прямых, проходящих через точку $A$, не перпендикулярны к прямой $a$.

## Дополнительные задачи

**72.** Даны четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения имеют эти прямые, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые?

Решение. Пусть $a$, $b$, $c$ и $d$ — данные прямые, $A$ — точка пересечения прямых $a$ и $b$. По условию задачи прямая $c$ не проходит через точку $A$ и пересекает прямые $a$ и $b$ в некоторых точках, которые обозначим буквами $B$ и $C$ (рис. 26). Прямая $d$ пересекает каждую из прямых $a$, $b$ и $c$ и не проходит через точки $A$, $B$ и $C$, поэтому получаем еще три точки: $D$, $E$ и $F$, в которых прямая $d$ пересекается с прямыми $a$, $b$ и $c$. Таким образом, данные четыре прямые имеют шесть точек пересечения (см. рис. 26).

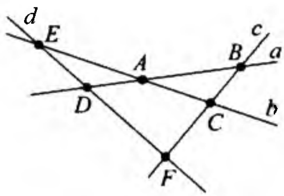

Рис. 26

Ответ. Шесть точек.

**73.** Сколько неразвернутых углов образуется при пересечении трех прямых, проходящих через одну точку?

Решение. При пересечении трех прямых, проходящих через точку $O$, образуется шесть лучей, исходящих из точки $O$, которые на рисунке 27 обозначены так: $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$, $h_5$ и $h_6$.

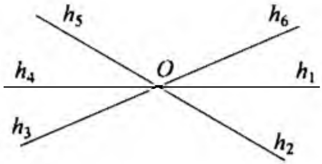


Рис. 27

Луч $h_1$ образует с остальными лучами пять углов, один из которых (угол $h_1h_4$) — развернутый. Итак, образуется четыре неразвернутых угла со стороной $h_1$: $\angle h_1h_2$, $\angle h_1h_3$, $\angle h_1h_5$ и $\angle h_1h_6$.

Аналогично, каждый из других пяти лучей является стороной четырех неразвернутых углов. При таком подсчете каждый угол учитывается дважды, например, $\angle h_1h_3$ и $\angle h_3h_1$, $\angle h_2h_4$ и $\angle h_4h_2$.

Таким образом, всего получается $(4 \cdot 6) : 2 = 12$ неразвернутых углов.

Ответ. 12 неразвернутых углов.

**74.** Точка $N$ лежит на отрезке $MP$. Расстояние между точками $M$ и $P$ равно 24 см, а расстояние между точками $N$ и $M$ в два раза больше расстояния между точками $N$ и $P$. Найдите расстояние: а) между точками $N$ и $P$; б) между точками $N$ и $M$.

Решение. Точка $N$ лежит на отрезке $MP$, поэтому

$$MN + NP = MP. \qquad (1)$$

а) По условию расстояние между точками $M$ и $P$ равно 24 см, т. е. $MP = 24$ см, а $MN = 2NP$. Подставим эти значения в равенство (1):

$$2NP + NP = 24 \text{ см}.$$

Отсюда находим: $NP = 8$ см.

б) Из равенства (1) получаем:

$$MN = MP - NP = 24 \text{ см} - 8 \text{ см} = 16 \text{ см}.$$

Ответ. а) 8 см; б) 16 см.

**75.** Три точки $K$, $L$, $M$ лежат на одной прямой, $KL = 6$ см, $LM = 10$ см. Каким может быть расстояние $KM$? Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

Решение. Возможны два случая.

а) Точки $K$ и $M$ лежат на разных лучах, исходящих из точки $L$ (рис. 28, *а*). В этом случае

$$KM = KL + LM = 6 \text{ см} + 10 \text{ см} = 16 \text{ см}.$$

б) Точки $K$ и $M$ лежат на одном луче, исходящем из точки $L$, т. е. лучи $LK$ и $LM$ совпадают (рис. 28, *б*). В этом случае $LM = LK + KM$, откуда $KM = LM - LK = 10$ см $- 6$ см $= 4$ см.

Ответ. 16 см или 4 см.


Рис. 28

**76.** Отрезок $AB$ длины $a$ разделен точками $P$ и $Q$ на три отрезка $AP$, $PQ$ и $QB$ так, что $AP = 2PQ = 2QB$. Найдите расстояние между: а) точкой $A$ и серединой отрезка $QB$; б) серединами отрезков $AP$ и $QB$.

Решение. Пусть $M$ — середина отрезка $AP$, а $N$ — середина отрезка $QB$ (рис. 29). Тогда $AM = MP$, поэтому $AP = 2AM = 2MP$. По условию задачи $AP = 2PQ = 2QB$. Следовательно, $2AM = 2MP = 2PQ = 2QB$, т. е. точки $M$, $P$ и $Q$ делят отрезок $AB$ на четыре равные части. Отсюда следует, что

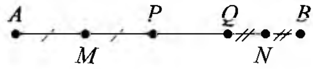


Рис. 29

$$AM = QB = \frac{a}{4}.$$

а) Так как $AB = AN + NB$, то $AN = AB - NB$, а так как $N$ — середина отрезка $QB$, равного $\frac{a}{4}$, то $NB = \frac{a}{8}$. Следовательно, $AN = a - \frac{a}{8} = \frac{7}{8}a$, т. е. расстояние между точками $A$ и $N$ равно $\frac{7}{8}a$.

б) $AN = AM + MN$, откуда

$$MN = AN - AM = \frac{7}{8}a - \frac{a}{4} = \frac{5}{8}a,$$

т. е. расстояние между точками $M$ и $N$ равно $\frac{5}{8}a$.

Ответ. а) $\frac{7}{8}a$; б) $\frac{5}{8}a$.

**77.** Отрезок длины $m$ разделен: а) на три равные части; б) на пять равных частей. Найдите расстояние между серединами крайних частей.

Решение. Обозначим данный отрезок через $AB$. По условию задачи $AB = m$.

а) Пусть точки $C$ и $D$ делят отрезок $AB$ на три равные части, а $M$ и $N$ — середины крайних частей $AC$ и $DB$ (рис. 30, $a$). Тогда $MN =$

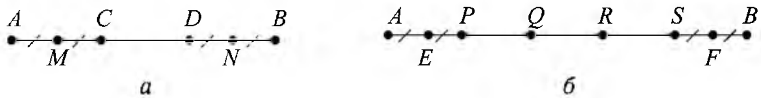


Рис. 30

$= AB - AM - NB$. Но $AC = CD = DB = \frac{m}{3}$, следовательно,

$$AM = \frac{1}{2}AC = \frac{m}{6}, \quad NB = \frac{1}{2}DB = \frac{m}{6}.$$

Таким образом, $MN = m - \frac{m}{6} - \frac{m}{6} = \frac{2}{3}m.$

б) Пусть точки $P$, $Q$, $R$ и $S$ делят отрезок $AB$ на пять равных частей, а $E$ и $F$ — середины крайних частей (рис. 30, *б*). Тогда

$$EF = AB - AE - FB,$$
$$AP = SB = \frac{m}{5}, \quad AE = \frac{m}{10}, \quad FB = \frac{m}{10}.$$

Таким образом,

$$EF = m - \frac{m}{10} - \frac{m}{10} = \frac{4}{5}m.$$

Ответ. а) $\frac{2}{3}m$; б) $\frac{4}{5}m$.

**78.** Отрезок в 36 см разделен на четыре не равные друг другу части. Расстояние между серединами крайних частей равно 30 см. Найдите расстояние между серединами средних частей.

Решение. На рисунке 31 $AB$ — данный отрезок, $C$, $D$ и $E$ — точки деления, а $P$, $M$, $N$ и $Q$ — соответственно середины отрезков $AC$, $CD$, $DE$ и $EB$. По условию $AB = 36$ см, $PQ = 30$ см, а нужно найти $MN$.

$$PQ = AB - \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}EB,$$

откуда

$$AC + EB = 2(AB - PQ) = 2(36 - 30) \text{ см} = 12 \text{ см}.$$

Далее, $AC + CE + EB = AB$, следовательно: $CE = 36$ см $-$ $- 12$ см $= 24$ см.

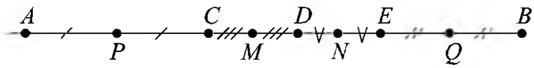


Рис. 31

Наконец, $MN = MD + DN = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}CE$.

Таким образом, $MN = 12$ см.

Ответ. 12 см.

**79*.** Точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой, точки $M$ и $N$ — середины отрезков $AB$ и $AC$. Докажите, что $BC = 2MN$.

Решение. Возможны два случая.

а) Точки $B$ и $C$ лежат на разных лучах, исходящих из точки $A$ (рис. 32, *а*). В этом случае

$$BC = BA + AC, \quad MN = MA + AN.$$

Так как $BA = 2\,MA$, $AC = 2\,AN$, то

$$BC = 2(MA + AN) = 2\,MN.$$

б) Точки $B$ и $C$ лежат на одном луче, исходящем из точки $A$. Пусть, например, точка $B$ лежит на отрезке $AC$ (рис. 32, *б*). Тогда $AB < AC$,


Рис. 32

а так как $AB = 2\,AM$, $AC = 2\,AN$, то $AM < AN$. Поэтому $BC = AC - AB$, $MN = AN - AM$ и, следовательно,

$$BC = 2\,AN - 2\,AM = 2(AN - AM) = 2\,MN.$$

**80.** Известно, что $\angle AOB = 35°$, $\angle BOC = 50°$. Найдите угол $AOC$. Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж с помощью линейки и транспортира.

Решение. Возможны два случая.

а) Лучи $OA$ и $OC$ лежат по разные стороны от прямой $OB$ (рис. 33, *а*). Тогда

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 35° + 50° = 85°.$$

б) Лучи $OA$ и $OC$ лежат по одну сторону от прямой $OB$ (рис. 33, *б*). Так как $\angle AOB < \angle BOC$, то $\angle AOC = \angle BOC - \angle AOB = 50° - 35° = 15°$.

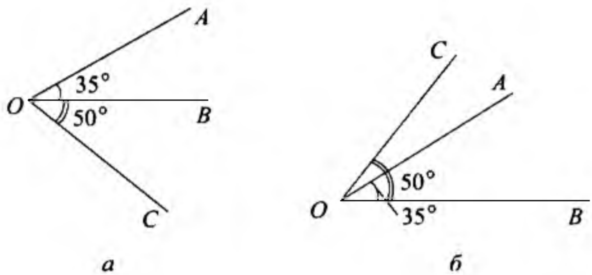


Рис. 33

Ответ. 85° или 15°.

**81.** Угол $hk$ равен 120°, угол $hm$ равен 150°. Найдите угол $km$. Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

Решение. Возможны два случая.

а) Лучи $k$ и $m$ лежат по одну сторону от прямой, содержащей луч $h$ (рис. 34, *а*). В этом случае

$$\angle km = \angle hm - \angle hk = 150° - 120° = 30°.$$

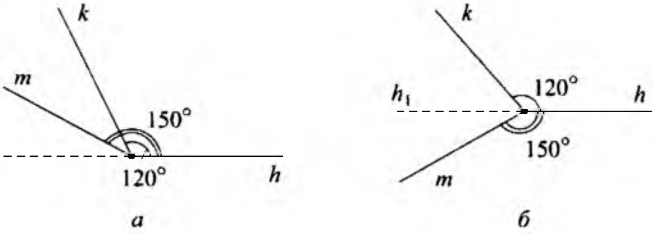


Рис. 34

б) Лучи $k$ и $m$ лежат по разные стороны от прямой, содержащей луч $h$ (рис. 34, *б*). В этом случае продолжение $h_1$ луча $h$ делит угол $km$ на два угла, и, следовательно,

$$\angle kh_1 + \angle h_1m = \angle km. \tag{1}$$

Углы $hk$ и $kh_1$ смежные, поэтому

$$\angle kh_1 = 180° - \angle hk = 60°.$$

Аналогично,

$$\angle h_1m = 180° - \angle hm = 30°.$$

Подставив эти значения в равенство (1), получим: $\angle km = 60° + 30° = 90°$.

Ответ. $30°$ или $90°$.

**82.** Найдите смежные углы, если: а) один из них на $45°$ больше другого; б) их разность равна $35°$.

Решение. Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ — данные смежные углы и $\angle 1 > \angle 2$. По свойству смежных углов

$$\angle 1 + \angle 2 = 180°. \tag{1}$$

а) По условию $\angle 1 = \angle 2 + 45°$. Отсюда и из равенства (1) находим: $\angle 1 = 112°30'$, $\angle 2 = 67°30'$.

б) $\angle 1 - \angle 2 = 35°$. Отсюда и из равенства (1) находим: $\angle 1 = 107°30'$, $\angle 2 = 72°30'$.

Ответ: а) $112°30'$ и $67°30'$; б) $107°30'$ и $72°30'$.

**83.** Найдите угол, образованный биссектрисами двух смежных углов.

Решение. Пусть $\angle AOB$ и $\angle COB$ — данные смежные углы, а $OP$ и $OQ$ — их биссектрисы (рис. 35).

Тогда

$$\angle POQ = \angle POB + \angle QOB. \tag{1}$$

Так как $OP$ — биссектриса угла $AOB$, то $\angle POB = \frac{1}{2}\angle AOB$. Аналогично, $\angle QOB = \frac{1}{2}\angle BOC$. Подставив эти значения в равенство (1), находим:

$$\angle POQ = \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOC).$$

Углы $AOB$ и $BOC$ — смежные, поэтому $\angle AOB + \angle BOC = 180°$. Следовательно,

$$\angle POQ = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°.$$

Ответ. 90°.

**84.** Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

Решение. Пусть $AOB$ и $A_1OB_1$ — данные вертикальные углы, $OM$ — биссектриса угла $AOB$, а $OM_1$ — продолжение луча $OM$ (рис. 36). Докажем, что $OM_1$ — биссектриса угла $A_1OB_1$.

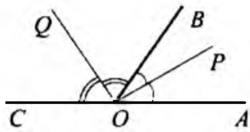


**Рис. 35**

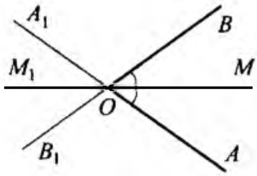


Рис. 36

Углы $AOM$ и $A_1OM_1$ — вертикальные, поэтому $\angle AOM = \angle A_1OM_1$. Аналогично, $\angle BOM = \angle B_1OM_1$. Так как $\angle AOM = \angle BOM$, то $\angle A_1OM_1 = \angle B_1OM_1$. Луч $OM_1$ проходит внутри угла $A_1OB_1$, следовательно, $OM_1$ — биссектриса этого угла. Таким образом, биссектрисы вертикальных углов $AOB$ и $A_1OB_1$ лежат на прямой $OM$.

**85*.** Докажите, что если биссектрисы углов $ABC$ и $CBD$ перпендикулярны, то точки $A$, $B$ и $D$ лежат на одной прямой.

Решение. Задача будет решена, если мы докажем, что угол $ABD$ развернутый. Предположим, что это не так. Пусть $BM$ и $BN$ — биссектрисы углов $ABC$ и $CBD$. По условию $\angle MBN = 90°$. Возможны два случая.

а) Луч $BC$ проходит внутри угла $ABD$ и поэтому делит этот угол на два угла: $ABC$ и $CBD$ (рис. 37, *а*). Тогда

$$\angle ABC + \angle CBD = \angle ABD,$$

или

$$(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = \angle ABD \text{ (см. рис. 37, } a).$$

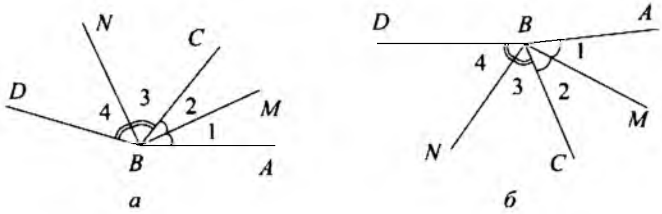


Рис. 37

Но $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle ABD < 180°$, следовательно,

$$2\angle 2 + 2\angle 3 < 180°,$$

$$\text{или } \angle MBN = \angle 2 + \angle 3 < 90°.$$

Это неравенство противоречит условию задачи.

б) Луч $BC$ лежит во внешней области угла $ABD$ (рис. 37, *б*). В этом случае $\angle ABC + \angle CBD > 180°$, поэтому $(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) > 180°$. Так как $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle MBN = \angle 2 + \angle 3 > 90°$. Это неравенство также противоречит условию задачи.

Таким образом, угол $ABD$ — развернутый и, следовательно, точки $A$, $B$ и $D$ лежат на одной прямой.

**86.** Даны две пересекающиеся прямые $a$ и $b$ и точка $A$, не лежащая на этих прямых. Через точку $A$ проведены прямые $m$ и $n$ так, что $m \perp a$, $n \perp b$. Докажите, что прямые $m$ и $n$ не совпадают.

Решение. Предположим, что прямая $n$ совпадает с прямой $m$. Тогда $a \perp m$, $b \perp m$. Две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, не пересекаются, поэтому прямые $a$ и $b$ не пересекаются. Это противоречит условию задачи, следовательно, прямые $m$ и $n$ не совпадают.

## Задачи повышенной трудности к главе 1

**322.** Пусть $a$ — число, выражающее длину отрезка $AB$ при единице измерения $CD$, а $b$ — число, выражающее длину $CD$ при единице измерения $AB$. Как связаны между собой числа $a$ и $b$?

Решение. Пусть $CD$ — исходная единица измерения, тогда $CD = 1$ и $AB = a$. Если $AB$ — новая единица измерения, то $AB = 1$ и $CD = b$. При переходе от единицы измерения $CD$ к единице измерения $AB$ числа, выражающие длины всех отрезков, умножаются на некоторое число $k$. Поэтому $1 \cdot k = b$, $a \cdot k = 1$ и, следовательно, $ab = 1$.

Ответ. $ab = 1$.

**323.** Длина огрезка $AB$ при единице измерения $E_1F_1$ выражается числом $m$, а при единице измерения $E_2F_2$ — числом $n$. Каким числом выражается длина отрезка $E_1F_1$ при единице измерения $E_2F_2$?

Решение. При единице измерения $E_1F_1$ имеем: $E_1F_1 = 1$, $AB = m$, а при единице измерения $E_2F_2$ получаем: $E_2F_2 = 1$, $AB = n$. При переходе от единицы измерения $E_1F_1$ к единице $E_2F_2$ числа, выражающие длины всех отрезков, умножаются на некоторое число $k$. Поэтому $E_1F_1 = 1 \cdot k$, $n = km$, откуда $k = \frac{n}{m}$, $E_1F_1 = \frac{n}{m}$. Следовательно, при единице измерения $E_2F_2$ длина отрезка $E_1F_1$ выражается числом $\frac{n}{m}$.

Ответ. $\frac{n}{m}$.

**324.** Пусть $\angle hk$ — меньший из двух смежных углов $hk$ и $hl$. Докажите, что

$$\angle hk = 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk),$$

а

$$\angle hl = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk).$$

Решение. По свойству смежных углов

$$\angle hk + \angle hl = 180^\circ. \qquad (1)$$

Из равенства (1) следует:

$$2\angle hk = 180^\circ - \angle hl + \angle hk,$$

откуда

$$\angle hk = 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk).$$

Аналогично, из равенства (1) получаем:

$$2\angle hl = 180^\circ + \angle hl - \angle hk,$$

откуда

$$\angle hl = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk).$$

**325.** Пять прямых пересекаются в одной точке (рис. 38) (см. рис. 147 учебника). Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4 и 5.

Решение. Обозначим точку пересечения данных прямых буквой $O$, углы, вертикальные с углами 3 и 4, цифрами 6 и 7, а прямую, содержащую стороны углов 2 и 5, через $AB$ (рис. 38).

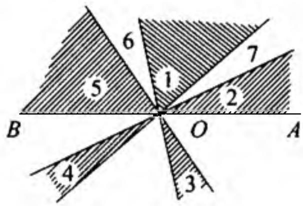

Рис. 38

По свойству вертикальных углов $\angle 3 = \angle 6$ и $\angle 4 = \angle 7$, поэтому

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 5.$$

Но сумма углов 5, 6, 1, 7 и 2 равна развернутому углу $AOB$ и, следовательно,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 5 = 180^\circ.$$

Поэтому

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ.$$

Ответ. $180^\circ$.

**326.** Даны шесть попарно пересекающихся прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух прямых проходит по крайней мере еще одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

Решение. Пусть $a_1$ и $a_2$ — две из данных шести прямых — пересекаются в точке $A$.

По условию задачи через точку $A$ проходит по крайней мере еще одна из данных прямых, которую обозначим $a_3$ (рис. 39). Докажем, что оставшиеся три прямые также проходят через точку $A$.

Допустим, что какая-то из них, например, прямая $a_4$, не проходит через эту точку. Прямая $a_4$ по условию задачи пересекает каждую из прямых $a_1$, $a_2$, $a_3$. Обозначим точки пересечения буквами $A_1$, $A_2$, $A_3$ (см. рис. 39).

Точки $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $A$ попарно различны, и по условию задачи через каждую из точек $A_1$, $A_2$, $A_3$ должна проходить по крайней мере еще одна из данных прямых, отличная от $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$. Но это невозможно, так как даны всего шесть прямых.

Мы пришли к противоречию, поэтому наше предположение неверно и, следовательно, все данные прямые проходят через точку $A$.

**327.** Даны шесть точек. Известно, что прямая, проходящая через любые две точки, содержит по крайней мере еще одну из данных точек. Докажите, что все эти точки лежат на одной прямой.

Решение. Задача решается аналогично задаче 326. Пусть $A_1$ и $A_2$ — две из данных шести точек, а $d$ — прямая $A_1A_2$. Докажем, что все данные точки лежат на прямой $d$.

По условию задачи на прямой $d$ лежит по крайней мере еще одна из данных точек, которую обозначим через $A_3$ (рис. 40). Докажем, что

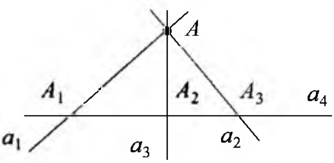


Рис. 39

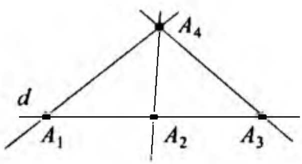


Рис. 40

оставшиеся три точки также лежат на прямой $d$. Допустим, что какая-то из них, например, точка $A_4$, не лежит на этой прямой. Тогда прямые $d$, $A_1A_4$, $A_2A_4$, $A_3A_4$ попарно различны. По условию задачи на каждой из прямых $A_1A_4$, $A_2A_4$, $A_3A_4$ должна лежать по крайней мере еще одна из данных точек, отличная от точек $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. Но это невозможно, так как дано всего шесть точек.

Мы пришли к противоречию, поэтому наше предположение неверно и, следовательно, все данные точки лежат на прямой $d$.

Глава 2

# ТРЕУГОЛЬНИКИ

## § 1. Первый признак равенства треугольников

**90.** Сторона $AB$ треугольника $ABC$ равна 17 см, сторона $AC$ вдвое больше стороны $AB$, а сторона $BC$ на 10 см меньше стороны $AC$. Найдите периметр треугольника $ABC$.

Решение. $AC = 2AB = 34$ см, $BC = AC - 10$ см $= 24$ см,

$$P_{ABC} = AB + BC + AC = (17 + 24 + 34) \text{ см} = 75 \text{ см}.$$

Ответ. 75 см.

**91.** Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 4,6 см.

Решение. Пусть в треугольнике $ABC$

$$AB + BC + CA = 48 \text{ см}, \ AB = 18 \text{ см}, \ BC - CA = 4{,}6 \text{ см}.$$

Тогда $BC + CA = 48$ см $- AB = 30$ см.

Складывая равенства

$$BC - CA = 4{,}6 \text{ см} \quad \text{и} \quad BC + CA = 30 \text{ см},$$

находим: $2BC = 34{,}6$ см, откуда

$$BC = 17{,}3 \text{ см}, CA = 30 \text{ см} - BC = 12{,}7 \text{ см}.$$

Ответ. 17,3 см и 12,7 см.

**92.** Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

Решение. Данные треугольники не могут быть равными, так как у равных треугольников стороны соответственно равны и поэтому равны и их периметры, а у данных треугольников периметры не равны.

Ответ. Нет.

**93.** Отрезки $AE$ и $DC$ пересекаются в точке $B$, являющейся серединой каждого из них. а) Докажите, что треугольники $ABC$ и $EBD$ равны; б) найдите углы $A$ и $C$ треугольника $ABC$, если в треугольнике $BDE$ $\angle D = 47°$, $\angle E = 42°$.

Решение. а) $AB = BE$ и $CB = BD$, так как по условию точка $B$ — середина отрезков $AE$ и $DC$ (рис. 41); $\angle CBA = \angle DBE$, так как эти углы вертикальные. По первому признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle EBD$.

б) В равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы, поэтому

$$\angle A = \angle E = 42°, \angle C = \angle D = 47°.$$

Ответ. б) $\angle A = 42°$, $\angle C = 47°$.

**94.** На рисунке 42 (рис. 52 учебника) $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники $ABD$ и $ACD$ равны; б) найдите $BD$ и $AB$, если $AC = 15$ см, $DC = 5$ см.

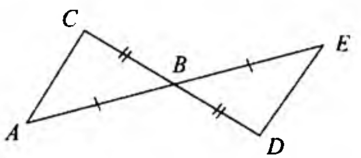


Рис. 41

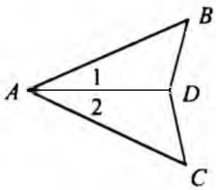


Рис. 42

Решение. а) $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$ по условию; $AD$ — общая сторона треугольников $ABD$ и $ACD$. Следовательно, $\triangle ABD = \triangle ACD$ по первому признаку равенства треугольников.

б) $AB = AC = 15$ см.

$BD = DC$, так как эти стороны лежат против равных углов 1 и 2, поэтому $BD = 5$ см.

Ответ. б) $BD = 5$ см, $AB = 15$ см.

**95.** На рисунке 43 (рис. 53 учебника) $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники $ABC$ и $CDA$ равны; б) найдите $AB$ и $BC$, если $AD = 17$ см, $DC = 14$ см.

Решение: а) $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$ по условию; $AC$ — общая сторона треугольников $ABC$ и $CDA$. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle CDA$ по первому признаку равенства треугольников.

б) $BC = AD = 17$ см.

$AB = DC$, так как эти стороны лежат против равных углов 1 и 2, поэтому $AB = 14$ см.

Ответ. б) $AB = 14$ см, $BC = 17$ см.

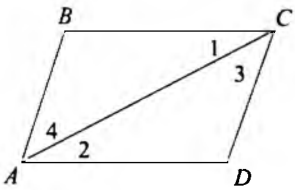


Рис. 43

**96.** На рисунке 44 (рис. 54 учебника) $OA = OD$, $OB = OC$, $\angle 1 = 74°$, $\angle 2 = 36°$. а) Докажите, что треугольники $AOB$ и $DOC$ равны; б) найдите $\angle ACD$.

Решение. а) $OA = OD$, $OB = OC$ по условию; $\angle AOB = \angle COD$, так как эти углы — вертикальные. Следовательно, $\triangle AOB = \triangle DOC$ по первому признаку равенства треугольников.

б) $\angle OCD = \angle 1$, так как эти углы лежат против равных сторон $OD$ и $OA$, поэтому $\angle OCD = 74°$.

$$\angle ACD = \angle 2 + \angle OCD = 36° + 74° = 110°.$$

Ответ. б) $110°$.

**97.** Отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

Решение. Пусть отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $O$ (рис. 45).

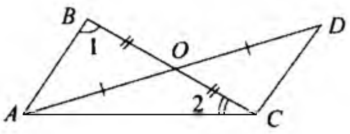


Рис. 44

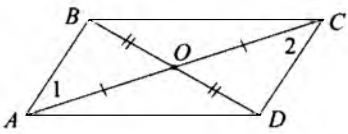


Рис. 45

Тогда $AO = OC$ и $BO = OD$ по условию; $\angle AOB = \angle COD$, так как эти углы — вертикальные. Следовательно, $\triangle AOB = \triangle COD$ по первому признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников $AOB$ и $COD$ следует, что $AB = CD$ и $\angle 1 = \angle 2$.

В треугольниках $ABC$ и $CDA$ имеем: $AB = CD$, $AC$ — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $\triangle ABC = \triangle CDA$ по первому признаку равенства треугольников.

**98.** В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$

$$AB = A_1B_1, \quad AC = A_1C_1, \quad \angle A = \angle A_1.$$

На сторонах $AB$ и $A_1B_1$ отмечены точки $P$ и $P_1$ так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$.

Решение. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $BC = B_1C_1$ и $\angle B = \angle B_1$.

Так как $AB = A_1B_1$ и $AP = A_1P_1$, то $BP = B_1P_1$.

$\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников ($BC = B_1C_1$, $BP = B_1P_1$, $\angle B = \angle B_1$).

**99.** На сторонах угла $CAD$ отмечены точки $B$ и $E$ так, что точка $B$ лежит на отрезке $AC$, а точка $E$ — на отрезке $AD$, причем $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$.

Решение. В треугольниках $ACE$ и $ADB$ имеем: угол $A$ — общий, $AC = AD$ и $AE = AB$ по условию (рис. 46), поэтому $\triangle ACE = \triangle ADB$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $\angle ABD = \angle AEC$.

Углы $CBD$ и $DEC$ — смежные с равными углами $ABD$ и $AEC$, поэтому $\angle CBD = \angle DEC$.

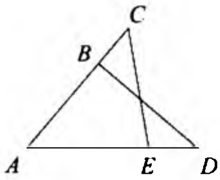

Рис. 46

## § 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

**105.** Точки $A$ и $C$ лежат по одну сторону от прямой $a$. Перпендикуляры $AB$ и $CD$ к прямой $a$ равны. а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CDB$; б) найдите $\angle ABC$, если $\angle ADB = 44°$.

Решение. а) Так как $AB \perp a$ и $CD \perp a$, то $\angle ABD = \angle CDB = 90°$ (рис. 47).

$AB = CD$ по условию, $BD$ — общая сторона треугольников $ABD$ и $CDB$. Следовательно, $\triangle ABD = \triangle CDB$ по первому признаку равенства треугольников.

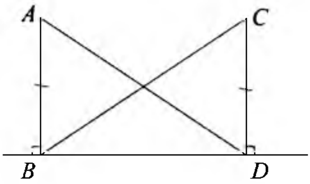

Рис. 47

б) Из равенства треугольников $ABD$ и $CDB$ следует, что $\angle CBD = \angle ADB$. Поэтому $\angle CBD = 44°$.

$$\angle ABC + \angle CBD = \angle ABD = 90°.$$

Отсюда получаем:

$$\angle ABC = 90° - \angle CBD = 90° - 44° = 46°.$$

Ответ. б) $46°$.

**106.** Медиана $AD$ треугольника $ABC$ продолжена за сторону $BC$ на отрезок $DE$, равный $AD$, и точка $E$ соединена с точкой $C$. а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ECD$; б) найдите $\angle ACE$, если $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$.

Решение. а) В треугольниках $ABD$ и $ECD$ имеем: $BD = DC$, так как $AD$ — медиана; $AD = DE$ по условию; $\angle ADB = \angle EDC$, так как эти углы — вертикальные (рис. 48). Следовательно, $\triangle ABD = \triangle ECD$ по первому признаку равенства треугольников.

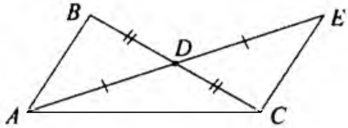

Рис. 48

б) Из равенства треугольников $ABD$ и $ECD$ следует, что $\angle ECD = \angle ABD$, поэтому $\angle ECD = 40°$.

$$\angle ACE = \angle ACD + \angle ECD = 56° + 40° = 96°.$$

Ответ. б) $96°$.

**107.** В равнобедренном треугольнике основание в два раза меньше боковой стороны, а периметр равен 50 см. Найдите стороны треугольника.

Решение. Пусть основание равнобедренного треугольника равно $x$, тогда каждая боковая сторона равна $2x$. Следовательно,

$$x + 2x + 2x = 50 \text{ см, откуда } x = 10 \text{ см, } 2x = 20 \text{ см.}$$

Ответ. 10 см, 20 см, 20 см.

**108.** Периметр равнобедренного треугольника $ABC$ с основанием $BC$ равен 40 см, а периметр равностороннего треугольника $BCD$ равен 45 см. Найдите стороны $AB$ и $BC$.

Решение. Так как треугольник $BCD$ равносторонний, то каждая его сторона равна 45см : 3 = 15 см. Итак, $BC = 15$ см.

Поэтому $AB + AC = 40$ см $- BC = 25$ см. По условию $BC$ — основание равнобедренного треугольника $ABC$, следовательно, $AB = AC = 25$ см : 2 = 12,5 см.

Ответ. $AB = 12{,}5$ см, $BC = 15$ см.

**109.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $BC$ проведена медиана $AM$. Найдите медиану $AM$, если периметр треугольника $ABC$ равен 32 см, а периметр треугольника $ABM$ равен 24 см.

Решение. Из условия задачи следует:

$$AB + AC + BC = 32 \text{ см, или } 2AB + BC = 32 \text{ см;}$$
$$AB + BM + AM = 24 \text{ см.}$$

Но $BM = \frac{1}{2}BC$, так как точка $M$ — середина стороны $BC$, поэтому

$$AB + \frac{1}{2}BC + AM = 24 \text{ см.}$$

Отсюда

$$AM = 24 \text{ см} - \left(AB + \frac{1}{2}BC\right) =$$
$$= 24 \text{ см} - \frac{1}{2}(2AB + BC) = 24 \text{ см} - \frac{1}{2} \cdot 32 \text{ см} = 8 \text{ см.}$$

Ответ. 8 см.

**110.** Докажите, что если медиана треугольника совпадает с его высотой, то треугольник равнобедренный.

Решение. Пусть $AM$ — медиана и высота треугольника $ABC$. Тогда $BM = MC$, $\angle AMB = \angle AMC = 90°$, $AM$ — общая сторона треугольников $AMB$ и $AMC$. Следовательно, $\triangle AMB = \triangle AMC$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $AB = AC$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный.

**111.** На рисунке 49 (рис. 65 учебника) $CD = BD$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольник $ABC$ равнобедренный.

Решение. $\triangle ADB = \triangle ADC$ по первому признаку равенства треугольников ($AD$ — общая сторона, $DB = DC$ и $\angle 1 = \angle 2$ по условию). Отсюда следует, что $AB = AC$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный.

**112.** На рисунке 50 (рис. 66 учебника) $AB = BC$, $\angle 1 = 130°$. Найдите $\angle 2$.

Решение. Так как $AB = BC$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный. Поэтому $\angle A = \angle C$ (углы при основании равны).

Углы 1 и $C$ — смежные, следовательно,

$$\angle C = 180° - \angle 1 = 180° - 130° = 50° \text{ и } \angle A = 50°.$$

Углы $A$ и 2 — вертикальные, поэтому $\angle 2 = \angle A = 50°$.

Ответ. 50°.

**113.** Точки $M$ и $P$ лежат по одну сторону от прямой $b$. Перпендикуляры $MN$ и $PQ$, проведенные к прямой $b$, равны. Точка $O$ — середина отрезка $NQ$. а) Докажите, что $\angle OMP = \angle OPM$; б) найдите $\angle NOM$, если $\angle MOP = 105°$.

Решение. а) $\triangle MNO = \triangle PQO$ по первому признаку равенства треугольников: $MN = PQ$ по условию; $QO = NO$, так как точка $O$ — середина $NQ$; $\angle MNO = \angle PQO = 90°$, так как $MN \perp b$ и $PQ \perp b$ (рис. 51). Отсюда следует, что $OM = OP$. Поэтому треугольник $OMP$ — равнобедренный и, следовательно, углы при его основании равны:

$$\angle OMP = \angle OPM.$$

б) Из равенства треугольников $MNO$ и $PQO$ следует, что

$$\angle NOM = \angle QOP.$$

Углы $NOM$, $MOP$ и $QOP$ составляют развернутый угол, поэтому

$$\angle NOM + \angle MOP + \angle QOP = 180°,$$

или

$$2\angle NOM + 105° = 180°,$$

откуда

$$\angle NOM = \frac{1}{2}(180° - 105°) = 37°30'.$$

Ответ. б) 37°30′.

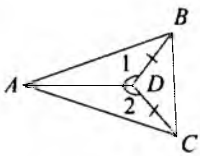


Рис. 49

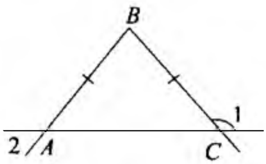


Рис. 50

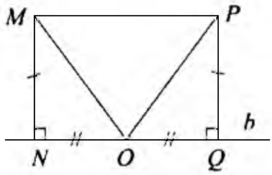


Рис. 51

**114.** Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны.

Решение. Пусть в равных треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AM$ и $A_1M_1$ — медианы (рис. 52). Тогда

$$BM = \frac{1}{2}BC, B_1M_1 = \frac{1}{2}B_1C_1,$$

и, следовательно, $BM = B_1M_1$.

$\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ по первому признаку равенства треугольников, поэтому $AM = A_1M_1$, что и требовалось доказать.

**115.** Медиана $AM$ треугольника $ABC$ равна отрезку $BM$. Докажите, что один из углов треугольника $ABC$ равен сумме двух других углов.

Решение. $BM = MC$, так как $AM$ — медиана, $AM = BM$ — по условию, поэтому $AM = MC$ (рис. 53).

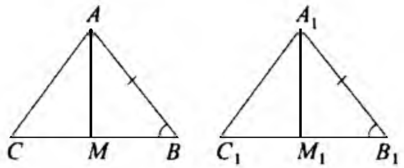


Рис. 52

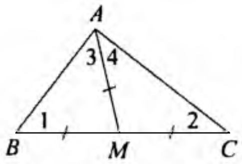


Рис. 53

Таким образом, треугольники $AMB$ и $AMC$ — равнобедренные. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$, откуда

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4, \text{ т. е. } \angle B + \angle C = \angle A,$$

что и требовалось доказать.

**116.** Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

Решение. Пусть треугольник $ABC$ — равносторонний. Тогда $AB = AC$ и $BA = BC$. Из первого равенства следует, что $\angle B = \angle C$ (углы при основании равнобедренного треугольника равны), а из второго, что $\angle A = \angle C$. Итак,

$$\angle A = \angle B = \angle C,$$

что и требовалось доказать.

**117.** На рисунке 54 (рис. 67 учебника) $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что $\angle BAC = \angle CED$.

Решение. Треугольники $ABC$ и $CDE$ — равнобедренные, следовательно,

$$\angle BAC = \angle BCA \text{ и } \angle CED = \angle DCE.$$

Но углы $BCA$ и $DCE$ — вертикальные, поэтому

$$\angle BCA = \angle DCE.$$

Из этих равенств следует, что $\angle BAC = \angle CED$.

**118.** На основании $BC$ равнобедренного треугольника $ABC$ отмечены точки $M$ и $N$ так, что $BM = CN$. Докажите, что: а) $\triangle BAM = \triangle CAN$; б) треугольник $AMN$ — равнобедренный.

Решение. а) $\angle B = \angle C$ (углы при основании равнобедренного треугольника равны).

$\triangle BAM = \triangle CAN$ по первому признаку равенства треугольников ($BA = CA$ и $BM = CN$ по условию, $\angle B = \angle C$, рис. 55).

б) Из равенства треугольников $BAM$ и $CAN$ следует, что $AM = AN$, т. е. треугольник $AMN$ — равнобедренный.

**119.** В равнобедренном треугольнике $DEK$ с основанием $DK$ отрезок $EF$ — биссектриса, $DK = 16$ см, $\angle DEF = 43°$. Найдите $KF$, $\angle DEC$, $\angle EFD$.

Решение. В равнобедренном треугольнике $DEK$ биссектриса $EF$, проведенная к основанию $DK$ (рис. 56), является медианой и высотой. Поэтому

$$KF = \frac{1}{2} DK = 8 \text{ см}, \angle EFD = 90°.$$

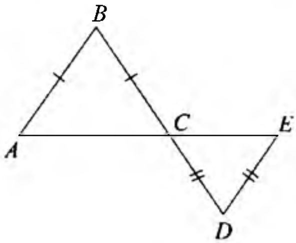


Рис. 54

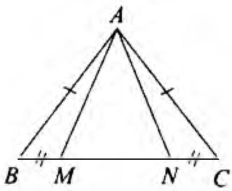


Рис. 55

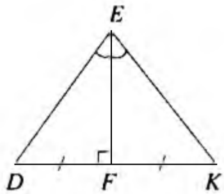


Рис. 56

Так как $EF$ — биссектриса угла $DEK$, то $\angle DEK = 2\angle DEF = 86°$.
Ответ. $KF = 8$ см, $\angle DEK = 86°$, $\angle EFD = 90°$.

**120.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ проведена медиана $BD$. На сторонах $AB$ и $CB$ отмечены соответственно точки $E$ и $F$ так, что $AE = CF$. Докажите, что: а) $\triangle BDE = \triangle BDF$; б) $\triangle ADE = \triangle CDF$.

Решение. а) По условию $BA = BC$ и $AE = CF$, поэтому $BE = BF$ (рис. 57).

Медиана $BD$, проведенная к основанию $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$, является также биссектрисой, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

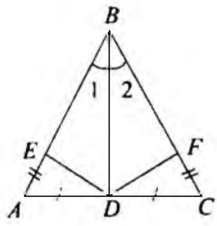


Рис. 57

$\triangle BDE = \triangle BDF$ по первому признаку равенства треугольников ($BE = BF$, $BD$ — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$).

б) Так как треугольник $ABC$ равнобедренный, то $\angle A = \angle C$. $\triangle ADE = \triangle CDF$ по первому признаку равенства треугольников ($AD = CD$, так как $BD$ — медиана; $AE = CF$ по условию; $\angle A = \angle C$).

## § 3. Второй и третий признаки равенства треугольников

**121.** Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в середине $O$ отрезка $AB$, $\angle OAD = \angle OBC$. а) Докажите, что $\triangle CBO = \triangle DAO$; б) найдите $BC$ и $CO$, если $CD = 26$ см, $AD = 15$ см.

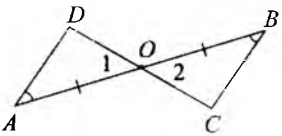


Рис. 58

Решение. а) $\triangle CBO = \triangle DAO$ по второму признаку равенства треугольников: $OB = OA$ и $\angle OBC = \angle OAD$ по условию; $\angle 1 = \angle 2$, так как эти углы — вертикальные (рис. 58).

б) Из равенства треугольников $CBO$ и $DAO$ следует, что $BC = AD$ и $CO = OD$. Поэтому $BC = 15$ см, $CO = \frac{1}{2}CD = 13$ см.

Ответ. б) $BC = 15$ см, $CO = 13$ см.

**122.** На рисунке 43 (рис. 53 учебника) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. а) Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$; б) найдите $AB$ и $BC$, если $AD = 19$ см, $CD = 11$ см.

Решение. а) $\triangle ABC = \triangle CDA$ по второму признаку равенства треугольников ($AC$ — общая сторона; $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ по условию).

б) Из равенства треугольников $ABC$ и $CDA$ следует, что $AB = CD$ и $BC = AD$. Поэтому $AB = 11$ см, $BC = 19$ см.

Ответ. б) $AB = 11$ см, $BC = 19$ см.

**123.** На биссектрисе угла $A$ взята точка $D$, а на сторонах этого угла — точки $B$ и $C$ такие, что $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $BD = CD$.

Решение. $\triangle ABD = \triangle ACD$ по второму признаку равенства треугольников: $AD$ — общая сторона; $\angle BAD = \angle CAD$, так как $AD$ — биссектриса угла $A$; $\angle ADB = \angle ADC$ по условию (рис. 59). Отсюда следует, что $BD = CD$.

**124.** По данным рисунка 60 (рис. 73 учебника) докажите, что $OP = OT$, $\angle P = \angle T$.

Решение. $\triangle OBP = \triangle OCT$ по второму признаку равенства треугольников ($OB = OC$ и $\angle B = \angle C$ по условию; $\angle BOP = \angle COT$, так как эти углы — вертикальные). Отсюда следует, что $OP = OT$ и $\angle P = \angle T$.

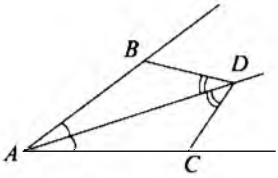


Рис. 59

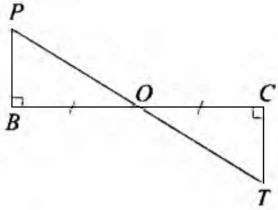


Рис. 60

**125.** На рисунке 61 (рис. 74 учебника) $\angle DBC = \angle DAC$, $BO = AO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

Решение. $\triangle AOC = \triangle BOD$ по второму признаку равенства треугольников ($AO = BO$ и $\angle OAC = \angle OBD$ по условию; $\angle AOC = \angle BOD$, так как эти углы вертикальные). Отсюда следует, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

**126.** На рисунке 61 (рис. 74 учебника) $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $CA = 13$ см. Найдите $DB$.

Решение. $\triangle DAB = \triangle CBA$ по второму признаку равенства треугольников ($AB$ — общая сторона, $\angle DAB = \angle CBA$ и $\angle DBA = \angle CAB$ по условию). Отсюда следует, что $DB = CA$ и, следовательно, $DB = 13$ см.

Ответ. 13 см.

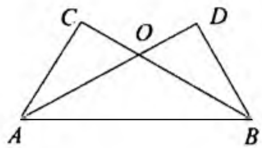


Рис. 61

**127.** В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах $AB$ и $A_1B_1$ отмечены точки $D$ и $D_1$ так, что $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$.

Решение. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников (рис. 62). Поэтому $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$. Из равенства

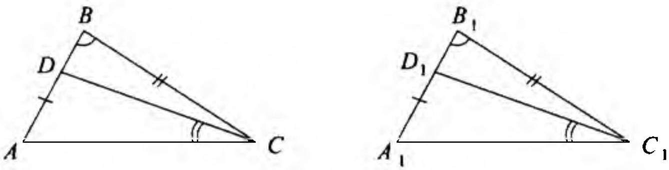


Рис. 62

этих углов, а также равенства углов $ACD$ и $A_1C_1D_1$ следует, что $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$.

$\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$ по второму признаку равенства треугольников ($BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$).

**128.** Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведенные к соответственно равным сторонам, равны.

Решение. Пусть $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, причем $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1$ (рис. 63), и пусть $AD$ и $A_1D_1$ — биссектрисы треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Докажем, что $AD = A_1D_1$.

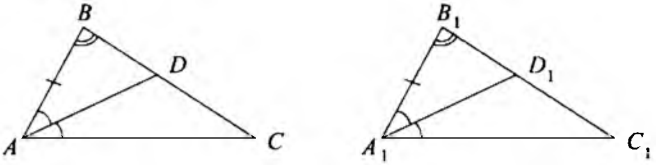


Рис. 63

$\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ по второму признаку равенства треугольников ($AB = A_1B_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$, так как $AD$ и $A_1D_1$ — биссектрисы равных углов $A$ и $A_1$). Отсюда следует, что $AD = A_1D_1$.

**129.** Отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются в середине $O$ отрезка $AC$, $\angle BCO = \angle DAO$. Докажите, что $\triangle BOA = \triangle DOC$.

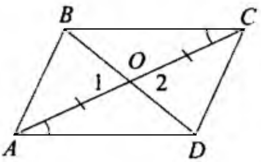


Рис. 64

Решение. $\triangle BOC = \triangle DOA$ по второму признаку равенства треугольников: $OC = OA$ и $\angle BCO = \angle DAO$ по условию; $\angle BOC = \angle DOA$, так как эти углы — вертикальные (рис. 64). Поэтому $OB = OD$.

$\triangle BOA = \triangle DOC$ по первому признаку равенства треугольников ($OA = OC$; $OB = OD$; $\angle 1 = \angle 2$, так как эти углы — вертикальные).

**130.** В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ отрезки $CO$ и $C_1O_1$ — медианы, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Докажите, что: а) $\triangle ACO = \triangle A_1C_1O_1$; б) $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$.

Решение. а) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по второму признаку равенства треугольников (рис. 65). Отсюда следует, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$.

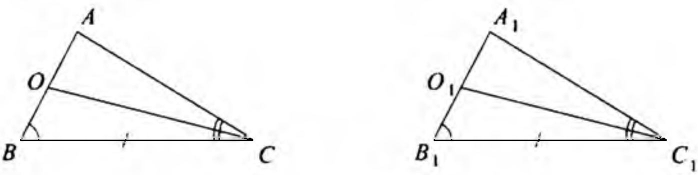


Рис. 65

Так как $AB = A_1B_1$, а точки $O$ и $O_1$ — середины сторон $AB$ и $A_1B_1$, то $AO = OB = A_1O_1 = O_1B_1$.

$\triangle ACO = \triangle A_1C_1O_1$ по первому признаку равенства треугольников ($AC = A_1C_1$, $AO = A_1O_1$, $\angle A = \angle A_1$).

б) $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$ по первому признаку равенства треугольников ($BC = B_1C_1$, $BO = B_1O_1$, $\angle B = \angle B_1$).

**131.** В треугольниках $DEF$ и $MNP$ $EF = NP$, $DF = MP$ и $\angle F = \angle P$. Биссектрисы углов $E$ и $D$ пересекаются в точке $O$, а биссектрисы углов $M$ и $N$ — в точке $K$. Докажите, что $\angle DOE = \angle MKN$.

Решение. $\triangle DEF = \triangle MNP$ по первому признаку равенства треугольников (рис. 66). Поэтому

$$DE = MN, \quad \angle D = \angle M, \quad \angle E = \angle N.$$

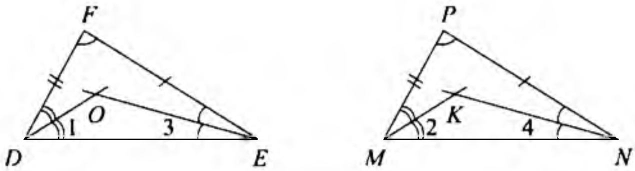


Рис. 66

Так как $DO$, $EO$, $MK$, $NK$ — биссектрисы углов, то

$$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle D = \frac{1}{2}\angle M = \angle 2,$$
$$\angle 3 = \frac{1}{2}\angle E = \frac{1}{2}\angle N = \angle 4,$$

$\triangle DEO = \triangle MNK$ по второму признаку равенства треугольников ($DE = MN$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$).

Отсюда следует, что $\angle DOE = \angle MKN$.

**132.** Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла $A$, пересекает стороны угла в точках $M$ и $N$. Докажите, что треугольник $AMN$ — равнобедренный.

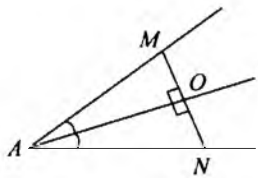


Рис. 67

Решение. Пусть $O$ — точка пересечения биссектрисы угла $A$ и прямой $MN$, перпендикулярной к $AO$ (рис. 67).

$\triangle AOM = \triangle AON$ по второму признаку равенства треугольников ($AO$ — общая сторона, $\angle OAM = \angle OAN$, $\angle AOM = \angle AON = 90°$). Отсюда следует, что $AM = AN$, т. е. треугольник $AMN$ — равнобедренный.

**133.** Докажите, что если биссектриса треугольника совпадает с его высотой, то треугольник — равнобедренный.

Решение. Пусть $AD$ — биссектриса и высота треугольника $ABC$ (рис. 68). Тогда $\triangle ABD = \triangle ACD$ по второму признаку равенства треугольников ($AD$ — общая сторона, $\angle BAD = \angle CAD$, $\angle ADB = \angle ADC = 90°$). Отсюда следует, что $AB = AC$, т. е. треугольник $ABC$ — равнобедренный.

**134.** Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника соответственно равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника.

Решение. Углы при основании равнобедренного треугольника равны. Поэтому, если основание и прилежащий к нему угол одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и прилежащему к нему углу другого равнобедренного треугольника, то равны также два других угла, прилежащих к этим основаниям, и, следовательно, треугольники равны по второму признаку равенства треугольников.

**135.** Докажите, что если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то треугольники равны.

Решение. Так как треугольники равносторонние, то из равенства двух сторон этих треугольников следует, что все стороны этих треугольников равны друг другу и, следовательно, треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников.

**136.** На рисунке 69 (рис. 52 учебника) $AB = AC$, $BD = DC$ и $\angle BAC = 50°$. Найдите $\angle CAD$.

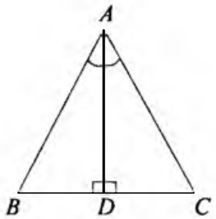

Рис. 68

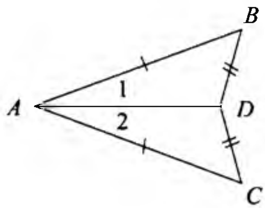

Рис. 69

Решение. $\triangle ABD = \triangle ACD$ по третьему признаку равенства треугольников ($AB = AC$, $BD = DC$, $AD$ — общая сторона), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. По условию $\angle BAC = \angle 1 + \angle 2 = 50°$. Отсюда следует, что $\angle CAD = \angle 2 = 25°$.

Ответ. 25°.

**137.** На рисунке 70 (рис. 53 учебника) $BC = AD$, $AB = CD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

Решение. $\triangle ABC = \triangle CDA$ по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CD$, $BC = AD$, $AC$ — общая сторона), поэтому $\angle B = \angle D$.

**138.** На рисунке 71 (рис. 75 учебника) $AB = CD$ и $BD = AC$. Докажите, что: а) $\angle CAD = \angle ADB$; б) $\angle BAC = \angle CDB$.

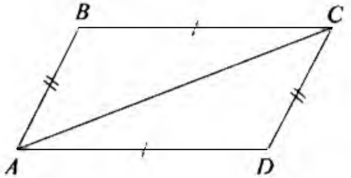


Рис. 70

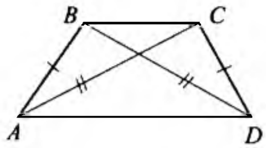


Рис. 71

Решение. а) $\triangle ABD = \triangle ACD$ по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CD$, $BD = AC$, $AD$ — общая сторона). Отсюда следует, что $\angle ADB = \angle CAD$.

б) $\triangle ABC = \triangle DCB$ по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CD$, $AC = BD$, $BC$ — общая сторона). Отсюда следует, что $\angle BAC = \angle CDB$.

**139.** На рисунке 72 (рис. 76 учебника) $AB = CD$, $AD = BC$, $BE$ — биссектриса угла $ABC$, $DF$ — биссектриса угла $ADC$. Докажите, что: а) $\angle ABE = \angle ADF$; б) $\triangle ABE = \triangle CDF$.

Решение. а) $\triangle ABC = \triangle CDA$ по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CD$, $BC = AD$, $AC$ — общая сторона). Отсюда следует, что $\angle B = \angle D$.

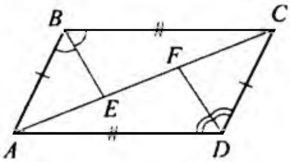


Рис. 72

Отрезки $BE$ и $DF$ — биссектрисы в равных треугольниках, проведенные к равным сторонам, поэтому $BE = DF$ (задача 128) и $\angle ABE = \angle ADF$, $\angle ABE = \angle CDF$.

б) $\triangle ABE = \triangle CDF$ по первому признаку равенства треугольников ($AB = CD$, $BE = DF$, $\angle ABE = \angle CDF$).

**140.** В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ медианы $BM$ и $B_1M_1$ равны; $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Решение. Так как $AC = A_1C_1$, а точки $M$ и $M_1$ — середины сторон $AC$ и $A_1C_1$, то $AM = A_1M_1$ (рис. 73).

$\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ по третьему признаку равенства треугольников ($AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $AM = A_1M_1$). Отсюда следует, что $\angle A = \angle A_1$.

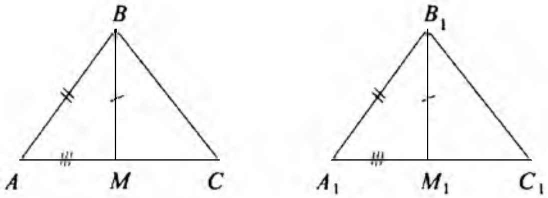


Рис. 73

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$).

**141.** В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ отрезки $AD$ и $A_1D_1$ — биссектрисы, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ и $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Решение. $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ по третьему признаку равенства треугольников (рис. 74). Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle B = \angle B_1$.

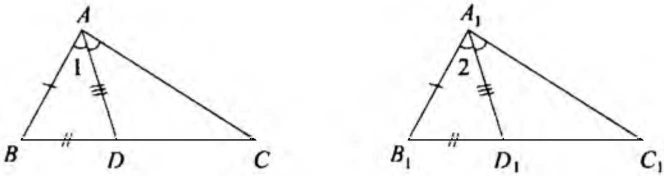


Рис. 74

Так как $AD$ и $A_1D_1$ — биссектрисы и $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle A = \angle A_1$.

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по второму признаку равенства треугольников ($AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$).

**142.** Равнобедренные треугольники $ADC$ и $CBD$ имеют общее основание $DC$. Прямая $AB$ пересекает отрезок $CD$ в точке $O$. Докажите, что: а) $\angle ADB = \angle ACB$; б) $DO = OC$.

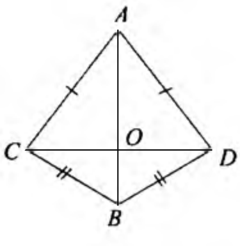


Рис. 75

Решение. а) По условию $AC = AD$ и $BC = BD$. Отрезок $AB$ — общая сторона треугольников $ABC$ и $ABD$ (рис. 75, на этом рисунке точка $B$ лежит на луче $AO$; случай, когда точка $B$ лежит на продолжении луча $AO$, рассматривается аналогично). Поэтому $\triangle ABC = \triangle ABD$ по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $\angle ADB = \angle ACB$.

б) Из равенства треугольников $ABC$ и $ABD$ следует также, что $\angle CAB = \angle DAB$. Это означает, что $AO$ — биссектриса равнобедренного треугольника $ACD$. Следовательно, $AO$ — также медиана треугольника $ACD$, т. е. $DO = OC$.

## § 4. Задачи на построение

**144.** Отрезки $AB$ и $CD$ — диаметры окружности. Докажите, что: а) хорды $BD$ и $AC$ равны; б) хорды $AD$ и $BC$ равны; в) $\angle BAD = \angle BCD$.

Решение. а) $\triangle AOC = \triangle BOD$ по двум сторонам и углу между ними: $OA = OB$ и $OC = OD$, так как эти отрезки — радиусы окружности; $\angle AOC = \angle BOD$, так как эти углы — вертикальные (рис. 76). Отсюда следует, что $AC = BD$.

б) Аналогично, из равенства треугольников $AOD$ и $BOC$ следует, что $AD = BC$.

в) $\triangle ABD = \triangle CDB$ по трем сторонам: $AB = CD$, так как эти отрезки — диаметры окружности; $AD = BC$ (п. б); $BD$ — общая сторона. Отсюда следует, что $\angle BAD = \angle BCD$.

**145.** Отрезок $MK$ — диаметр окружности с центром $O$, а $MP$ и $PK$ — равные хорды этой окружности. Найдите $\angle POM$.

Решение. Отрезок $PO$ — медиана равнобедренного треугольника $MPK$ (рис. 77). Поэтому $PO$ — также и высота этого треугольника, т. е. $\angle POM = 90°$.

Ответ. 90°.

**146.** Отрезки $AB$ и $CD$ — диаметры окружности с центром $O$. Найдите периметр треугольника $AOD$, если известно, что $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.

Решение. Обратимся к рисунку 76. В задаче 144 б) доказано, что $AD = BC$, поэтому $AD = 13$ см.

Так как $OA$ и $OD$ — радиусы окружности, то $OA = OD = \frac{1}{2} AB = 8$ см.

Следовательно, $P_{AOD} = AD + OA + OD = 29$ см.

Ответ. 29 см.

**147.** На окружности с центром $O$ отмечены точки $A$ и $B$ так, что угол $AOB$ — прямой. Отрезок $BC$ — диаметр окружности. Докажите, что хорды $AB$ и $AC$ равны.

Решение. $\triangle AOB = \triangle AOC$ (рис. 78) по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $AB = AC$.

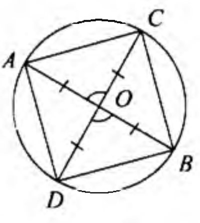


Рис. 76

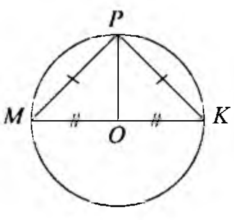


Рис. 77

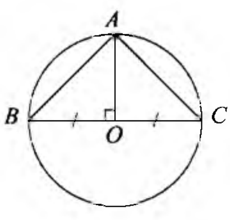


Рис. 78

**148.** На прямой даны две точки $A$ и $B$. На продолжении луча $BA$ отложите отрезок $BC$ так, чтобы $BC = 2AB$.

Решение. Проведем окружность радиуса $BA$ с центром в точке $B$. Она пересекает прямую $AB$ в точках $A$ и $D$ (рис. 79).

Далее проведем окружность радиуса $DB$ с центром в точке $D$. Она пересекает прямую $AB$ в точках $B$ и $C$.

Отрезок $BC$ — искомый, поскольку $AB = BD = DC$, и поэтому $BC = 2AB$.

**149.** Даны прямая $a$, точка $B$, не лежащая на ней, и отрезок $PQ$. Постройте точку $M$ на прямой $a$ так, чтобы $BM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

Решение. Построим окружность с центром $B$, радиус которой равен $PQ$ (рис. 80). Если эта окружность имеет общую точку $M$ с прямой

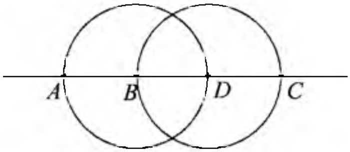


Рис. 79

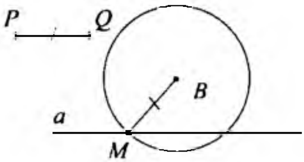


Рис. 80

$a$, то $M$ — искомая точка, поскольку $BM = PQ$. Если же построенная окружность не имеет общих точек с прямой $a$, то задача не имеет решения.

Ответ. Не всегда.

**150.** Даны окружность, точка $A$, не лежащая на ней, и отрезок $PQ$. Постройте точку $M$ на окружности так, чтобы $AM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

Решение. Построим окружность с центром $A$, радиус которой равен $PQ$ (рис. 81). Если эта окружность имеет общую точку $M$ с данной окружностью, то $M$ — искомая точка, поскольку $AM = PQ$. Если же построенная окружность не имеет общих точек с данной окружностью, то задача не имеет решения.

**151.** Даны острый угол $BAC$ и луч $XY$. Постройте угол $YXZ$ так, чтобы $\angle YXZ = 2\angle BAC$.

Решение. Сначала от данного луча $XY$ отложим угол $DXY$, равный данному углу $BAC$ (рис. 82). Построение угла, равного данному, описано в п. 23 учебника.

Затем от луча $XD$ отложим угол $ZXD$, равный углу $BAC$, как показано на рисунке 82.

Угол $YXZ$ — искомый, так как $\angle YXZ = 2\angle BAC$.

Ответ. Не всегда.

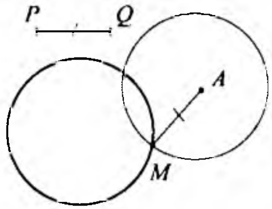


Рис. 81

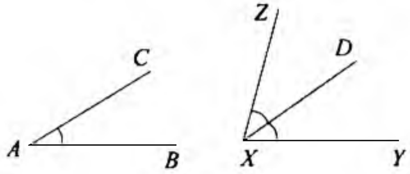


Рис. 82

**152.** Дан тупой угол $AOB$. Постройте луч $OX$ так, чтобы углы $XOA$ и $XOB$ были равными тупыми углами.

Решение. Построим биссектрису $OY$ данного тупого угла $AOB$ (рис. 83). Построение биссектрисы угла описано в п. 23 учебника.

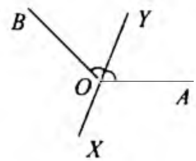


Рис. 83

Проведем далее прямую $OY$ и обозначим через $OX$ луч, являющийся продолжением луча $OY$. Докажем, что луч $OX$ является искомым.

В самом деле, углы $XOA$ и $XOB$ являются смежными с равными острыми углами $YOA$ и $YOB$. Поэтому $\angle XOA$ и $\angle XOB$ — равные тупые углы.

**154.** Дан треугольник $ABC$. Постройте: а) биссектрису $AK$; б) медиану $BM$; в) высоту $CH$ треугольника.

Решение. а) Построим биссектрису угла $A$ (как это сделать, описано в п. 23 учебника) и обозначим буквой $K$ точку пересечения построенной биссектрисы со стороной $BC$. Отрезок $AK$ — искомая биссектриса треугольника $ABC$.

б) Построим середину отрезка $AC$ (как это сделать, описано в п. 23) и обозначим ее буквой $M$. Проведем отрезок $BM$. Этот отрезок и есть искомая медиана треугольника $ABC$.

в) Построим прямую, проходящую через точку $C$ и перпендикулярную к прямой $AB$ (см. задачу 153). Обозначим буквой $H$ точку пересечения построенной прямой и прямой $AB$. Отрезок $CH$ — искомая высота треугольника $ABC$.

**155.** С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) $45°$; б) $22°30'$.

Решение. Проведем прямую и отметим на ней точки $A$ и $B$. Затем построим прямую $AC$, перпендикулярную к прямой $AB$ (как это сделать, описано в п. 23 учебника). Очевидно, $\angle BAC = 90°$.

а) Построим биссектрису $AD$ угла $BAC$. Тогда $\angle BAD = 45°$.

б) Построив теперь биссектрису $AE$ угла $BAD$, получим угол $BAE$, равный $22°30'$.

## Дополнительные задачи

**156.** Периметр треугольника $ABC$ равен 15 см. Сторона $BC$ больше стороны $AB$ на 2 см, а сторона $AB$ меньше стороны $AC$ на 1 см. Найдите стороны треугольника.

Решение. По условию

$$AB + BC + AC = 15 \text{ см}, \; BC = AB + 2 \text{ см},$$
$$AB = AC - 1 \text{ см}.$$

Отсюда получаем

$$AB + (AB + 2 \text{ см}) + (AB + 1 \text{ см}) = 15 \text{ см},$$

или $3AB = 12$ см.

Следовательно, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см.

Ответ. $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см.

**157.** В равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны на 2 см, но меньше суммы боковых сторон на 3 см. Найдите стороны треугольника.

Решение. Пусть $BC$ — основание равнобедренного треугольника $ABC$. Тогда

$$AB = AC, \quad BC = AB + 2 \text{ см}, \quad BC = AB + AC - 3 \text{ см}.$$

Отсюда получаем:

$$AB + 2 \text{ см} = AB + AB - 3 \text{ см}$$

и, следовательно, $AB = 5$ см.

Поэтому $BC = 7$ см, $AC = 5$ см.

Ответ. 5 см, 5 см, 7 см.

**158.** Основание равнобедренного треугольника равно 8 см. Медиана, проведенная к боковой стороне, разбивает треугольник на два треугольника так, что периметр одного треугольника на 2 см больше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника.

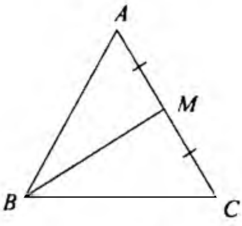

Рис. 84

Решение. Пусть в треугольнике $ABC$: $BC = 8$ см, $AB = AC$, $BM$ — медиана (рис. 84). Возможны два случая: а) $P_{ABM} = P_{CBM} + 2$ см; б) $P_{CBM} = P_{ABM} + 2$ см.

а) $AB + BM + AM = BC + BM + MC + 2$ см. Отсюда, учитывая равенство $AM = MC$, получаем: $AB = BC + 2$ см $= 8$ см $+ 2$ см $= 10$ см.

б) $BC + BM + MC = AB + BM + AM + 2$ см. Отсюда получаем: $BC = AB + 2$ см, т. е. $AB = BC - 2$ см $= 8$ см $- 2$ см $= 6$ см.

Ответ. 10 см или 6 см.

**159.** Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и угол, противолежащий основанию, одного треугольника соответственно равны боковой стороне и углу, противолежащему основанию, другого треугольника.

Решение. Указанные треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

**160.** Прямая $a$ проходит через середину отрезка $AB$ и перпендикулярна к нему. Докажите, что: а) каждая точка прямой $a$ равноудалена от точек $A$ и $B$; б) каждая точка, равноудаленная от точек $A$ и $B$, лежит на прямой $a$.

Решение. Пусть точка $O$ — середина отрезка $AB$ (рис. 85).

а) Точка $O$, очевидно, равноудалена от точек $A$ и $B$, т. е. $AO = BO$.

Пусть $M$ — произвольная точка прямой $a$, отличная от точки $O$. Тогда $\triangle AOM = \triangle BOM$ по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$, $MO$ — общая сторона, $\angle AOM = \angle BOM = 90°$ по условию). Отсюда следует, что $MA = MB$, т. е. точка $M$ равноудалена от точек $A$ и $B$.

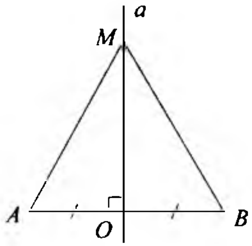


Рис. 85

б) Пусть точка $M$ равноудалена от точек $A$ и $B$, т. е. $MA = MB$. Докажем, что точка $M$ лежит на прямой $a$.

Если точка $M$ лежит на прямой $AB$, то она совпадает с точкой $O$ и, следовательно, лежит на прямой $a$. Если же точка $M$ не лежит на прямой $AB$, то точки $M$, $A$ и $B$ являются вершинами равнобедренного треугольника $MAB$. Отрезок $MO$ — медиана этого треугольника, а следовательно, и высота, т. е. $MO \perp AB$. Отсюда следует, что прямая $MO$ совпадает с прямой $a$ и, значит, точка $M$ лежит на прямой $a$.

**161.** В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ медианы $AM$ и $A_1M_1$ равны, $BC = B_1C_1$ и $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Решение. Так как $BC = B_1C_1$, то $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}B_1C_1 = B_1M_1$. Следовательно, $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ по двум сторонам и углу между ними (рис. 86). Из равенства этих треугольников следует, что $AB = A_1B_1$ и $\angle B = \angle B_1$.

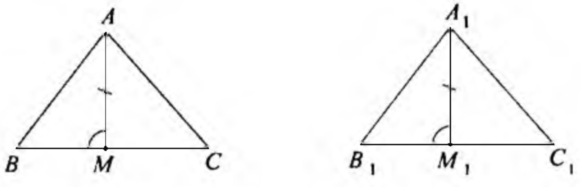


Рис. 86

Так как $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними).

**162.** На рисунке 87 (рис. 92 учебника) треугольник $ADE$ — равнобедренный, $DE$ — основание. Докажите, что: а) если $BD = CE$, то $\angle CAD = \angle BAE$ и $AB = AC$; б) если $\angle CAD = \angle BAE$, то $BD = CE$ и $AB = AC$.

Решение. Так как треугольник $ADE$ — равнобедренный с основанием $DE$, то $AD = AE$ и $\angle D = \angle E$.

а) Если $BD = CE$, то $DC = BE$ и тогда $\triangle ADC = \triangle AEB$ по двум сторонам и углу между ними ($AD = AE$, $DC = EB$, $\angle D = \angle E$). Отсюда следует, что $AC = AB$ и $\angle CAD = \angle BAE$.

б) Если $\angle CAD = \angle BAE$, то $\triangle ADC = \triangle AEB$ по стороне и двум прилежащим углам ($AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$, $\angle D = \angle E$). Отсюда следует, что $AC = AB$ и $DC = BE$. Последнее равенство запишем в виде: $BD + BC = BC + CE$, откуда получаем $BD = CE$, что и требовалось доказать.

**163.** Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

Решение. Пусть треугольник $ABC$ — равнобедренный с основанием $BC$, а точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ — середины его сторон (рис. 88). Тогда $AB = AC$, $\angle B = \angle C$, $BC_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC = CB_1$, $BA_1 = CA_1$. Следовательно, $\triangle BA_1C_1 = \triangle CA_1B_1$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $A_1C_1 = A_1B_1$, т. е. треугольник $A_1B_1C_1$ — равнобедренный, что и требовалось доказать.

**164.** На сторонах равностороннего треугольника $ABC$ отложены равные отрезки $AD$, $BE$ и $CF$, как показано на рисунке 89 (рис. 93 учебника). Точки $D$, $E$, $F$ соединены отрезками. Докажите, что треугольник $DEF$ — равносторонний.

Решение. Так как треугольник $ABC$ — равносторонний, то $\angle A = \angle B = \angle C$, а так как $AD = BE = CF$, то $CD = AE = BF$. Отсюда следует, что треугольники $ADE$, $BEF$ и $CFD$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $DE = EF = FD$, т. е. треугольник $DEF$ — равносторонний.

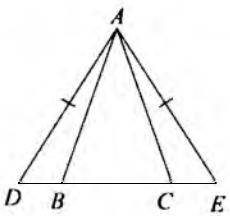


Рис. 87

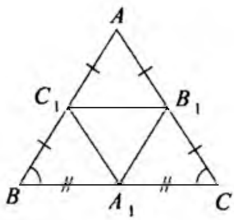


Рис. 88

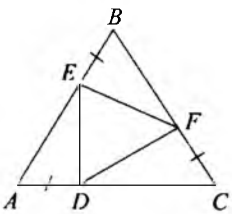


Рис. 89

**165.** Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в их общей середине $O$. На отрезках $AC$ и $BD$ отмечены точки $K$ и $K_1$ так, что $AK = BK_1$. Докажите, что: а) $OK = OK_1$; б) точка $O$ лежит на прямой $KK_1$.

Решение. а) $\triangle AOC = \triangle BOD$ по двум сторонам и углу между ними (рис. 90), откуда следует, что $\angle A = \angle B$.

$\triangle AOK = \triangle BOK_1$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $OK = OK_1$.

б) Из равенства треугольников $AOK$ и $BOK_1$ следует также, что $\angle 1 = \angle 2$.

Пусть луч $OK_2$ — продолжение луча $OK$. Тогда $\angle 1 = \angle BOK_2$.

Из последних двух равенств следует, что $\angle 2 = \angle BOK_2$, т. е. $\angle BOK_1 = \angle BOK_2$, а это означает, что лучи $OK_1$ и $OK_2$ совпадают, т. е. луч $OK_1$ является продолжением луча $OK$. Поэтому точки $O$, $K$ и $K_1$ лежат на одной прямой.

**166.** Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в их общей середине $O$. Точки $M$ и $N$ — середины отрезков $AC$ и $BD$. Докажите, что точка $O$ — середина отрезка $MN$.

Решение. $\triangle AOC = \triangle BOD$ по двум сторонам и углу между ними (см. рис. 90), поэтому $AC = BD$ и, следовательно, $AM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = BN$. Отсюда, используя задачу 165, получаем, что $OM = ON$ и точки $O$, $M$ и $N$ лежат на одной прямой. Поэтому точка $O$ — середина отрезка $MN$.

**167.** Стороны равностороннего треугольника $ABC$ продолжены, как показано на рисунке 91 (рис. 94 учебника), на равные отрезки $AD$, $CE$, $BF$. Докажите, что треугольник $DEF$ — равносторонний.

Решение. Так как треугольник $ABC$ — равносторонний, то углы $A$, $B$ и $C$ равны друг другу. Отсюда следует, что смежные с ними углы $DAE$, $FBD$ и $ECF$ также равны друг другу, а так как $AE = BD = CF$ и $AD = BF = CE$, то треугольники $ADE$, $BFD$ и $CEF$ равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства этих треугольников следует, что $DE = FD = EF$, т. е. треугольник $DEF$ — равносторонний.

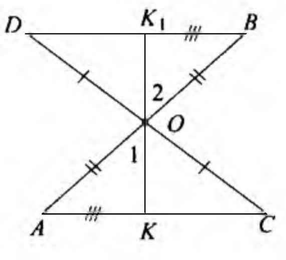


Рис. 90

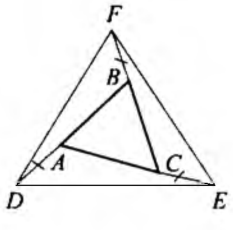


Рис. 91

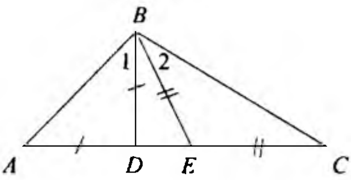


Рис. 92

**168.** В треугольнике $ABC$ $\angle A = 38°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 32°$. На стороне $AC$ отмечены точки $D$ и $E$ так, что точка $D$ лежит на отрезке $AE$, $BD = DA$, $BE = EC$. Найдите $\angle DBE$.

Решение. Так как треугольники $ADB$ и $BEC$ — равнобедренные (рис. 92), то $\angle 1 = \angle A = 38°$, $\angle 2 = \angle C = 32°$. Поэтому

$$\angle DBE = \angle B - \angle 1 - \angle 2 = 110° - 38° - 32° = 40°.$$

Ответ. 40°.

**169.** На рисунке 93 (рис. 95 учебника) $OC = OD$, $OB = OE$. Докажите, что $AB = EF$. Объясните способ измерения ширины озера (отрезка $AB$ на рисунке 93), основанный на этой задаче.

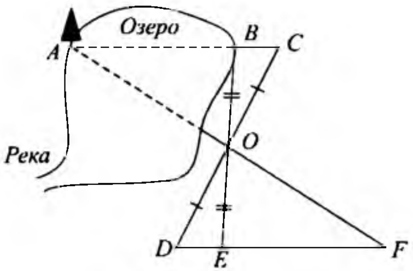


Рис. 93

Решение. $\triangle BOC = \triangle DOE$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle D = \angle C$ и $BC = DE$.

$\triangle AOC = \triangle FOD$ по стороне и двум прилежащим к ней углам ($OC = OD$ по условию; $\angle C = \angle D$; $\angle AOC = \angle FOD$, так как эти углы — вертикальные). Отсюда следует, что $AC = DF$, а так как $BC = DE$, то $AB = EF$, что и требовалось доказать.

**170.** Докажите, что треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AD = A_1D_1$, где $AD$ и $A_1D_1$ — биссектрисы треугольников.

Решение. $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ по двум сторонам и углу между ними (рис. 94). Отсюда следует, что $\angle B = \angle B_1$.

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$).

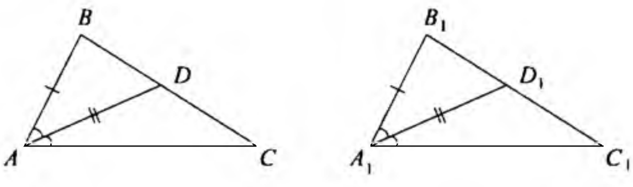


Рис. 94

**171.** В треугольниках $ABC$ и $ADC$ стороны $BC$ и $AD$ равны и пересекаются в точке $O$, $\angle OAC = \angle OCA$. Докажите, что треугольники $ABO$ и $CDO$ равны.

Решение. Обратимся к рисунку 95. $\triangle ABC = \triangle ADC$ по двум сторонам и углу между ними ($AC$ — общая сторона, $CB = AD$, $\angle ACB = \angle CAD$). Отсюда следует, что $AB = CD$, $\angle B = \angle D$ и $\angle BAC = \angle ACD$. Из последнего равенства получаем, что $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 95).

$\triangle ABO = \triangle CDO$ по стороне и двум прилежащим углам ($AB = CD$, $\angle B = \angle D$, $\angle 1 = \angle 2$).

**172.** На рисунке 96 (рис. 96 учебника) $AC = AD$, $AB \perp CD$. Докажите, что $BC = BD$ и $\angle ACB = \angle ADB$.

Решение. Так как треугольник $ACD$ — равнобедренный, то высота, проведенная к основанию $CD$, является биссектрисой, и поэтому $\angle CAB = \angle DAB$.

$\triangle ACB = \triangle ADB$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $BC = BD$ и $\angle ACB = \angle ADB$.

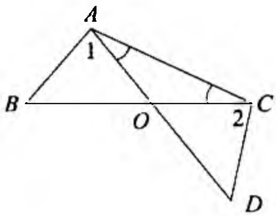


Рис. 95

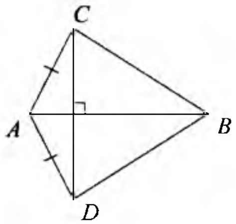


Рис. 96

**173*.** Докажите, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника.

Решение. Пусть угол $BAD$ — смежный с углом $A$ треугольника $ABC$ (рис. 97). Докажем, например, что $\angle BAD > \angle B$.

Отметим середину $O$ стороны $AB$ и на продолжении отрезка $CO$ отложим отрезок $OE$, равный $CO$. Тогда $\triangle BOC = \triangle AOE$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $\angle B = \angle 1$. Но $\angle BAD > \angle 1$ и, следовательно, $\angle BAD > \angle B$.

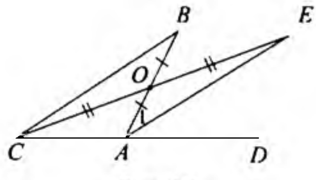


Рис. 97

**174*.** Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$.

Решение. Наложим треугольник $ABC$ на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона $BC$ совместилась с $B_1C_1$, а сторона $BA$ наложилась

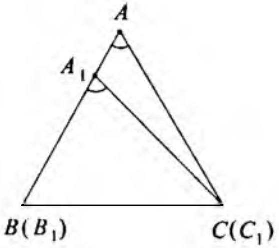


Рис. 98

на луч $B_1A_1$. Это можно сделать, так как $BC = B_1C_1$ и $\angle B = \angle B_1$. Если допустить, что точки $A$ и $A_1$ не совместятся (рис. 98), то получится треугольник $CAA_1$, у которого один из углов, прилежащих к стороне $AA_1$, равен углу, смежному с другим углом треугольника $CAA_1$ (на рисунке 98 $\angle A = \angle BA_1C$). Но этого не может быть (см. задачу 173). Следовательно, точка $A$ совместится с точкой $A_1$, а поэтому и весь треугольник $ABC$ совместится с треугольником $A_1B_1C_1$, т. е. эти треугольники равны.

**175*.** На сторонах угла $XOY$ отмечены точки $A$, $B$, $C$ и $D$ так, что $OA = OB$, $AC = BD$ (рис. 99). Прямые $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $E$. Докажите, что луч $OE$ — биссектриса угла $XOY$. Используя эту задачу, опишите способ построения биссектрисы угла.

Решение. $\triangle OAD = \triangle OBC$ по двум сторонам и углу между ними ($OA = OB$, $OD = OC$, угол $O$ — общий). Отсюда следует, что $\angle ODA = \angle OCB$.

Сравним треугольники $BDE$ и $ACE$. В этих треугольниках $BD = AC$, $\angle BDE = \angle ACE$ и углы с вершиной $E$ равны как вертикальные. Поэтому $\triangle BDE = \triangle ACE$ (см. задачу 174), и, следовательно, $BE = AE$.

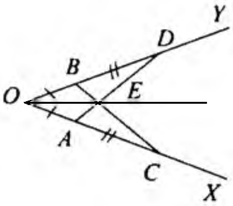


Рис. 99

$\triangle OAE = \triangle OBE$ по трем сторонам. Отсюда следует, что $\angle AOE = \angle BOE$, т. е. луч $OE$ — биссектриса угла $XOY$.

Биссектрису данного угла с вершиной $O$ можно построить следующим образом. На сторонах угла откладываем равные отрезки $OA$ и $OB$, $AC$ и $BD$, как показано на рисунке 99. Затем проводим отрезки $AD$ и $BC$. Они пересекаются в некоторой точке $E$. Остается провести луч $OE$ — это и есть биссектриса данного угла.

**176*.** Докажите, что треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, где $AM$ и $A_1M_1$ — медианы треугольников.

Решение. На продолжениях отрезков $AM$ и $A_1M_1$ отложим отрезки $MD$ и $M_1D_1$, равные $AM$ и $A_1M_1$ (рис. 100). $\triangle AMC = \triangle BMD$ по двум сторонам и углу между ними ($AM = MD$ по построению; $BM = MC$, так как $AM$ — медиана; $\angle AMC = \angle BMD$, так как эти углы — вертикальные). Отсюда следует, что $BD = AC$.

Аналогично, из равенства треугольников $A_1M_1C_1$ и $B_1M_1D_1$ следует, что $B_1D_1 = A_1C_1$, а так как $AC = A_1C_1$ (по условию), то $BD = B_1D_1$.

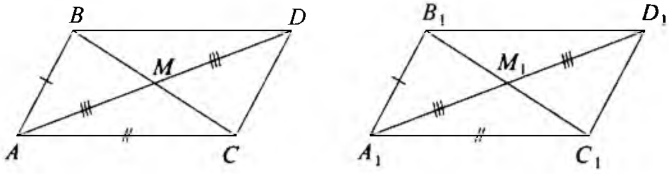


Рис. 100

$\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ по трем сторонам ($AB = A_1B_1$; $BD = B_1D_1$; $AD = A_1D_1$, так как $AD = 2AM$, $A_1D_1 = 2A_1M_1$ и $AM = A_1M_1$). Отсюда следует, что медианы $BM$ и $B_1M_1$ в этих треугольниках равны (см. задачу 114). Поэтому $BC = 2BM = 2B_1M_1 = B_1C_1$ и $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем сторонам.

**177*.** Даны два треугольника: $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $K$ и $L$, а на сторонах $A_1C_1$ и $B_1C_1$ треугольника $A_1B_1C_1$ — точки $K_1$ и $L_1$ так, что $AK = A_1K_1$, $LC = L_1C_1$. Докажите, что: а) $KL = K_1L_1$; б) $AL = A_1L_1$.

Решение. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle C = \angle C_1$ (рис. 101).

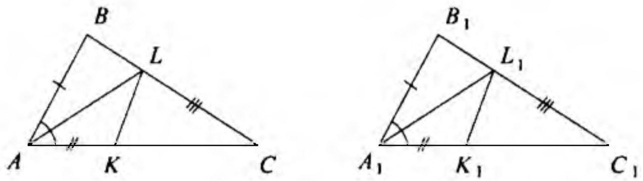


Рис. 101

Так как $AC = A_1C_1$ и $AK = A_1K_1$, то $KC = K_1C_1$.

а) $\triangle KCL = \triangle K_1C_1L_1$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $KL = K_1L_1$.

б) Аналогично, из равенства треугольников $ACL$ и $A_1C_1L_1$ следует, что $AL = A_1L_1$.

**178*.** Даны три точки $A$, $B$, $C$, лежащие на одной прямой, и точка $D$, не лежащая на этой прямой. Докажите, что по крайней мере два из трех отрезков $AD$, $BD$ и $CD$ не равны друг другу.

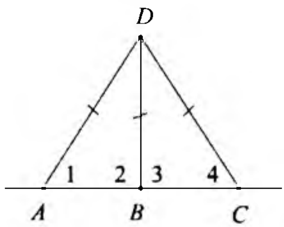


Рис. 102

Решение. Пусть точка $B$ лежит между $A$ и $C$. Предположим, что $AD = BD = CD$ (рис. 102). Тогда треугольники $ADB$, $BDC$ и $ADC$ — равнобедренные, откуда следует, что $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 1 = \angle 4$, т. е. углы 1, 2, 3 и 4 равны друг другу. Но углы 2 и 3 — смежные, поэтому $\angle 2 + \angle 3 = 2\angle 2 = 180°$, откуда $\angle 2 = 90°$. Итак, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 90°$, т. е. из точки $D$ проведены три перпендикуляра к прямой $AC$, чего не может быть. Следовательно, наше предположение о равенстве отрезков $AD$, $BD$ и $CD$ неверно. Поэтому хотя бы два из этих отрезков не равны друг другу.

**179.** На боковых сторонах $AB$ и $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ отмечены точки $P$ и $Q$ так, что $\angle PXB = \angle QXC$, где $X$ — середина основания $BC$. Докажите, что $BQ = CP$.

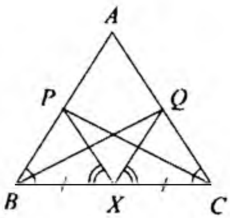


Рис. 103

Решение. Так как треугольник $ABC$ — равнобедренный с основанием $BC$, то $\angle B = \angle C$ (рис. 103).

$\triangle BPX = \triangle CQX$ по стороне и двум прилежащим углам ($BX = CX$ и $\angle PXB = \angle QXC$ по условию, $\angle B = \angle C$).

Отсюда следует, что $BP = CQ$.

$\triangle BPC = \triangle CQB$ по двум сторонам и углу между ними ($BP = CQ$, $BC$ — общая сторона, $\angle B = \angle C$), поэтому $CP = BQ$, что и требовалось доказать.

**180.** Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку, с центром на данной прямой.

Решение. Проведем окружность данного радиуса с центром в данной точке $M$ (рис. 104). Пусть $O$ — общая точка этой окружности и данной прямой $a$. Проведем теперь окружность данного радиуса с центром в точке $O$. Эта окружность является искомой.

**181.** Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

Решение. Проведем окружности данного радиуса с центрами в данных точках $A$ и $B$ (рис. 105). Пусть эти окружности имеют общую точку $O$. Проведем окружность данного радиуса с центром в точке $O$. Эта окружность — искомая.

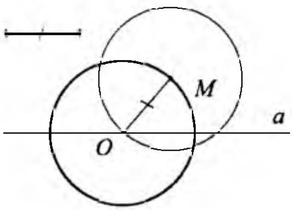


Рис. 104

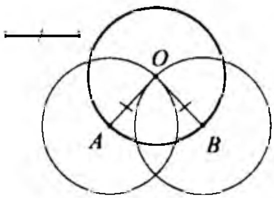


Рис. 105

**182.** Даны прямая $a$, точки $A$, $B$ и отрезок $PQ$. Постройте треугольник $ABC$ так, чтобы вершина $C$ лежала на прямой $a$ и $AC = PQ$.

Решение. Проведем окружность с центром в точке $A$ и радиусом, равным $PQ$ (рис. 106). Пусть $C$ — общая точка этой окружности и прямой $a$. Проведем отрезки $AB$, $BC$ и $CA$. Если точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой, то они являются вершинами искомого треугольника $ABC$.

**183.** Даны окружность, точки $A$, $B$ и отрезок $PQ$. Постройте треугольник $ABC$ так, чтобы вершина $C$ лежала на данной окружности и $AC = PQ$.

Решение. Проведем окружность с центром в точке $A$ и радиусом, равным $PQ$ (рис. 107). Пусть $C$ — общая точка проведенной и данной

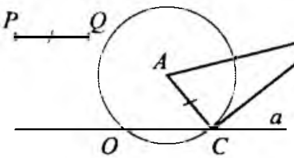


Рис. 106

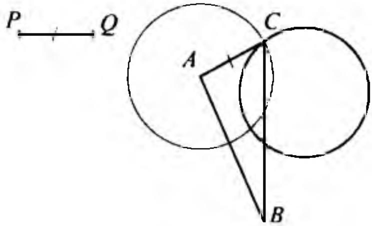


Рис. 107

окружностей. Проведем отрезки $AB$, $BC$ и $CA$. Если точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой, то они являются вершинами искомого треугольника $ABC$.

**184.** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ постройте точку, равноудаленную от вершин $A$ и $C$.

Решение. Построим середину отрезка $AC$ (точка $D$ на рисунке 108) и прямую, проходящую через точку $D$ и перпендикулярную к прямой $AC$ (как это сделать, описано в п. 23 учебника). Точка $M$ пересечения построенной прямой и прямой $BC$ является искомой точкой, так как $MA = MC$ (см. задачу 160).

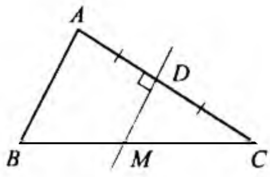


Рис. 108

**185.** С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на четыре равные части.

Решение. Построим середину данного отрезка (как это сделать, описано в п. 23 учебника), а затем построим середины каждого из двух получившихся отрезков. Построенные три точки разделяют данный отрезок на четыре равные части.

## Задачи повышенной трудности к главе 2

**328.** Точки $C_1$ и $C_2$ лежат по разные стороны от прямой $AB$ и расположены так, что $AC_1 = BC_2$ и $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$. Докажите, что прямая $C_1C_2$ проходит через середину отрезка $AB$.

Решение. Пусть точка $O$ — середина отрезка $AB$ (рис. 109). Докажем, что точки $C_1$, $O$ и $C_2$ лежат на одной прямой. Отсюда последует, что прямая $C_1C_2$ проходит через середину $O$ отрезка $AB$.

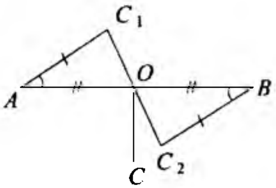

Рис. 109

$\triangle AOC_1 = \triangle BOC_2$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle AOC_1 = \angle BOC_2$.

Пусть луч $OC$ — продолжение луча $OC_1$. Тогда углы $AOC_1$ и $BOC$ — вертикальные и поэтому $\angle AOC_1 = \angle BOC$. Отсюда и из равенства углов $AOC_1$ и $BOC_2$ следует, что $\angle BOC = \angle BOC_2$. Эти равные углы отложены по одну сторону от луча $OB$, поэтому лучи $OC$ и $OC_2$ совпадают, т. е. луч $OC_2$ является продолжением луча $OC_1$, а значит, точки $C_1$, $O$ и $C_2$ лежат на одной прямой.

**329.** Докажите, что если угол, прилежащая к нему сторона и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны.

Решение. Пусть в треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$: $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Продолжим сторону $AB$ на отрезок $BD$, равный $BC$, а сторону $A_1B_1$ — на отрезок $B_1D_1$, равный $B_1C_1$ (рис. 110). Тогда

$$AD = AB + BD = AB + BC,$$
$$A_1D_1 = A_1B_1 + B_1D_1 = A_1B_1 + B_1C_1,$$

откуда следует, что $AD = A_1D_1$.

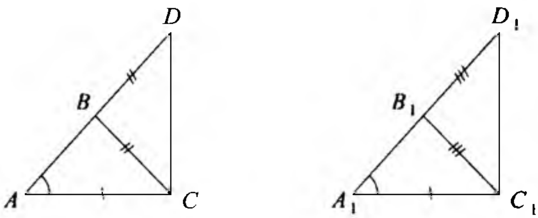

Рис. 110

$\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $DC = D_1C_1$ и $\angle D = \angle D_1$.

Равнобедренные треугольники $BCD$ и $B_1C_1D_1$ равны по основанию и прилежащему углу, и, следовательно, $BD = B_1D_1$, а так как $AD = A_1D_1$, то $AB = A_1B_1$.

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$) и углу между ними ($\angle A = \angle A_1$).

**330.** Сторона и два угла одного треугольника равны какой-то стороне и каким-то двум углам другого. Могут ли эти треугольники быть неравными?

Решение. Приведем пример неравных треугольников, удовлетворяющих условиям задачи.

Рассмотрим равнобедренный треугольник $ABC$, в котором $AC = BC \neq AB$ (рис. 111). В этом треугольнике $\angle A = \angle B$.

Пусть $AH$ — высота треугольника $ABC$. На продолжении луча $HB$ отложим отрезок $HD$, равный $HB$, и рассмотрим треугольники $AHB$ и $AHD$. Они равны по двум сторонам ($HB = HD$, $AH$ — общая сторона) и углу между ними ($\angle AHB = \angle AHD = 90°$). Отсюда следует, что $AB = AD$ и $\angle B = \angle ADH$.

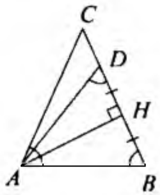

Рис. 111

Так как $AB \neq AC$, то точка $D$ не совпадает с точкой $C$. Поэтому треугольники $ABC$ и $ABD$ не равны. Вместе с тем эти треугольники имеют общую сторону $AB$, общий угол $B$ и равные углы $CAB$ и $ADB$, т. е. эти неравные треугольники удовлетворяют условиям задачи.

Ответ. Да.

**331.** Две стороны и угол одного треугольника равны каким-то двум сторонам и углу другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

Решение. Приведем пример неравных треугольников, удовлетворяющих условиям задачи.

Рассмотрим равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AB$ и отметим какую-нибудь точку $D$ на продолжении стороны $AB$ (рис. 112).

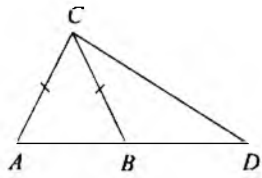

Рис. 112

Треугольники $ADC$ и $BDC$ удовлетворяют условиям задачи (они имеют равные стороны $AC$ и $BC$, общую сторону $CD$ и общий угол $D$), но не являются равными.

Ответ. Да.

**332.** Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что $OC = OD$, если $AC = AO = BO = BD$.

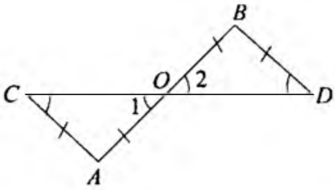


Рис. 113

Решение. Треугольники $AOC$ и $BOD$ — равнобедренные, поэтому $\angle C = \angle 1$ и $\angle 2 = \angle D$ (рис. 113). Но углы 1 и 2 равны как вертикальные. Поэтому $\angle C = \angle D$.

$\triangle AOC = \triangle BOD$ по стороне ($AO = BO$), прилежащему к этой стороне углу ($\angle 1 = \angle 2$) и противолежащему углу ($\angle C = \angle D$). Этот признак равенства треугольников содержится в задаче 174. Из равенства треугольников $AOC$ и $BOD$ следует, что $OC = OD$.

Глава 3

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

## § 1. Признаки параллельности двух прямых

**186.** На рисунке 114 (рис. 106 учебника) прямые $a$ и $b$ пересечены прямой $c$. Докажите, что $a \parallel b$, если: а) $\angle 1 = 37°$, $\angle 7 = 143°$; б) $\angle 1 = \angle 6$; в) $\angle 1 = 45°$, а угол 7 в три раза больше угла 3.

Решение. а) Так как $\angle 7$ и $\angle 8$ — смежные углы, то по свойству смежных углов $\angle 7 + \angle 8 = 180°$. По условию $\angle 7 = 143°$, поэтому $\angle 8 = 180° - 143° = 37°$. Итак, $\angle 1 = \angle 8 = 37°$, а углы 1 и 8 — соответственные углы при пересечении прямых $a$ и $b$ секущей $c$, следовательно, $a \parallel b$.

б) $\angle 1 = \angle 6$ по условию, $\angle 6 = \angle 8$, так как углы 6 и 8 — вертикальные, поэтому $\angle 1 = \angle 8$, а значит, как и в задаче а), $a \parallel b$.

в) По условию $\angle 7 = 3\angle 3$, $\angle 1 = 45°$. Но $\angle 1 = \angle 3$, так как углы 1 и 3 — вертикальные, поэтому $\angle 7 = 3\angle 1 = 135°$. Так как $\angle 7$ и $\angle 8$ — смежные углы, то по свойству смежных углов $\angle 7 + \angle 8 = 180°$. Отсюда следует, что $\angle 8 = 180° - 135° = 45°$, т. е. $\angle 1 = \angle 8$. Тем самым, как и в задаче а), $a \parallel b$.

**187.** По данным рисунка 115 (рис. 107 учебника) докажите, что $AB \parallel DE$.

Решение. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, так как углы 1 и 2, 3 и 4 — углы при основании равнобедренных треугольников $ABC$ и $CDE$ соответственно, $\angle 2 = \angle 3$, так как углы 2 и 3 — вертикальные, поэтому $\angle 1 = \angle 4$. Углы 1 и 4 — накрест лежащие углы при пересечении прямых $AB$ и $DE$ секущей $AE$, следовательно, $AB \parallel DE$.

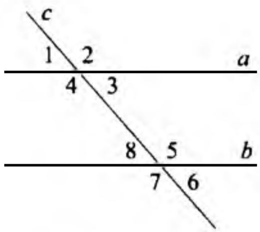


Рис. 114

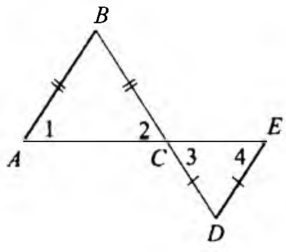


Рис. 115

**188.** Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в их общей середине. Докажите, что прямые $AC$ и $BD$ параллельны (рис. 116).

Решение. Треугольники $AOC$ и $BOD$ равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = OB$, $CO = OD$, так как точка $O$ — общая середина отрезков $AB$ и $CD$, $\angle 1 = \angle 2$, так как углы 1 и 2 — вертикальные). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle 3 = \angle 4$. Углы 3 и 4 — накрест лежащие при пересечении прямых $AC$ и $BD$ секущей $AB$, следовательно, $AC \parallel BD$.

**189.** Используя данные рисунка 117 (рис. 108 учебника), докажите, что $BC \parallel AD$.

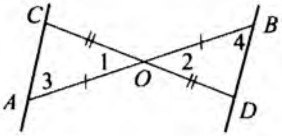


Рис. 116

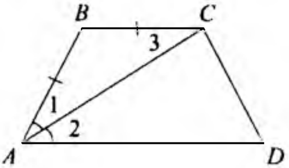


Рис. 117

Решение. По условию треугольник $ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$), поэтому $\angle 1 = \angle 3$, так как $\angle 1$ и $\angle 3$ — углы при его основании. $\angle 1 = \angle 2$ по условию, а значит, $\angle 2 = \angle 3$. Углы 2 и 3 — накрест лежащие углы при пересечении прямых $BC$ и $AD$ секущей $AC$, следовательно, $BC \parallel AD$.

**190.** На рисунке 118 (рис. 109 учебника) $AB = BC$, $AD = DE$, $\angle C = 70°$, $\angle EAC = 35°$. Докажите, что $DE \parallel AC$.

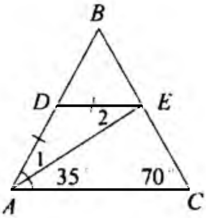


Рис. 118

Решение. По условию треугольник $ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$), поэтому его углы при основании равны: $\angle A = \angle C = 70°$. $\angle A = \angle 1 + 35°$, поэтому $\angle 1 = 35°$. Треугольник $ADE$ — также равнобедренный (по условию $AD = DE$), поэтому его углы при основании равны: $\angle 1 = \angle 2 = 35°$.

Итак, $\angle EAC = \angle 2$, а эти углы — накрест лежащие при пересечении прямых $DE$ и $AC$ секущей $AE$. Следовательно, $DE \parallel AC$.

**191.** Отрезок $BK$ — биссектриса треугольника $ABC$. Через точку $K$ проведена прямая, пересекающая сторону $BC$ в точке $M$ так, что $BM = MK$. Докажите, что $KM \parallel AB$.

Решение. По условию треугольник $BMK$ — равнобедренный ($MB = MK$), поэтому его углы при основании равны: $\angle 2 = \angle 3$ (рис. 119). Так как отрезок $BK$ — биссектриса треугольника $ABC$, то $\angle 2 = \angle 1$. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$. Но углы 1 и 3 — накрест лежащие углы при пересечении прямых $AB$ и $KM$ секущей $BK$, поэтому $KM \parallel AB$.

**192.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен 40°, а угол $BCE$, смежный с углом $ACB$, равен 80°. Докажите, что биссектриса угла $BCE$ параллельна прямой $AB$.

Решение. Пусть луч $CF$ — биссектриса угла $BCE$, равного 80° (рис. 120). Тогда $\angle 1 = \angle 2 = 40°$, поэтому $\angle 2 = \angle A$. Но углы $A$ и 2 — соответственные при пересечении прямых $CF$ и $AB$ секущей $AC$, следовательно, $CF \parallel AB$.

**193.** В треугольнике $ABC$ $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$. Через вершину $B$ проведена прямая $BD$ так, что луч $BC$ — биссектриса утла $ABD$. Докажите, что $AC \parallel BD$.

Решение. По условию луч $BC$ — биссектриса угла $ABD$ (рис. 121), поэтому $\angle ABD = 2\angle ABC = 140°$. Углы $A$ и $ABD$ — односторонние углы при пересечении прямых $AC$ и $BD$ секущей $AB$, а так как $\angle A + \angle ABD = 40° + 140° = 180°$, то $AC \parallel BD$.

## § 2. Аксиома параллельных прямых

**196.** Дан треугольник $ABC$. Сколько прямых, параллельных стороне $AB$, можно провести через вершину $C$?

Решение. По аксиоме параллельных прямых через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. Поэтому через точку $C$ можно провести только одну прямую, параллельную стороне $AB$.

Ответ. Одну прямую.

**197.** Через точку, не лежащую на прямой $p$, проведены четыре прямые. Сколько из этих прямых пересекают прямую $p$? Рассмотрите возможные случаи.

Решение. Пусть $A$ — данная точка. Возможны два случая:

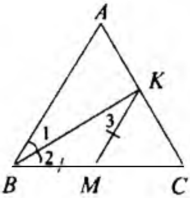


Рис. 119

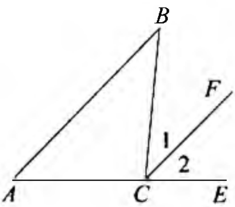


Рис. 120

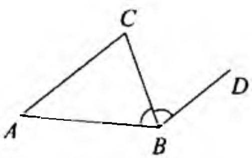


Рис. 121

а) все четыре прямые, проходящие через точку $A$, пересекают прямую $p$;

б) одна из прямых параллельна прямой $p$. Тогда остальные три прямые пересекают ее, так как через точку $A$, не лежащую на данной прямой $p$, проходит только одна прямая, параллельная прямой $p$.

Ответ. Четыре или три прямые.

**198.** Прямые $a$ и $b$ перпендикулярны к прямой $p$, прямая $c$ пересекает прямую $a$. Пересекает ли прямая $c$ прямую $b$?

Решение. По условию прямые $a$ и $b$ перпендикулярны к прямой $p$, поэтому они не пересекаются (см. п. 12 учебника), т. е. $a \parallel b$. По условию прямая $c$ пересекает одну из параллельных прямых (прямую $a$), поэтому, согласно следствию 1° из аксиомы параллельных прямых, она пересекает и прямую $b$.

Ответ. Да.

**199.** Прямая $p$ параллельна стороне $AB$ треугольника $ABC$. Докажите, что прямые $BC$ и $AC$ пересекают прямую $p$.

Решение. Прямая $BC$ пересекает прямую $AB$, параллельную прямой $p$, а значит, согласно следствию 1° из аксиомы параллельных прямых, она пересекает и прямую $p$. По той же причине прямая $AC$ пересекает прямую $p$.

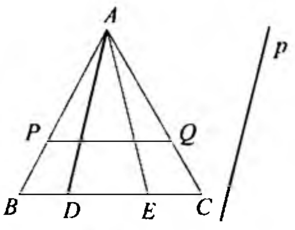

Рис. 122

**200.** На рисунке 122 (рис. 115 учебника) $AD \parallel p$. Докажите, что прямая $p$ пересекает прямые $AB$, $AE$, $AC$, $BC$ и $PQ$.

Решение. Прямые $AB$, $AE$ и $AC$ пересекают прямую $AD$, а по условию $AD \parallel p$. Согласно следствию 1° из аксиомы параллельных прямых, прямые $AB$, $AE$ и $AC$ пересекают прямую $p$. Аналогично, прямые $BC$ и $PQ$ пересекают прямую $AD$, поэтому они пересекают и параллельную ей прямую $p$.

**201.** Сумма накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 210°. Найдите эти углы.

Решение. Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ — накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых $a$ и $b$ секущей $c$ (рис. 123). По условию $\angle 1 + \angle 2 = 210°$, а по теореме о накрест лежащих углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2 = 105°$.

Ответ. 105°, 105°.

**202.** На рисунке 124 (рис. 116 учебника) прямые $a$, $b$ и $c$ пересечены секущей $d$, $\angle 1 = 42°$, $\angle 2 = 140°$, $\angle 3 = 138°$. Какие из прямых $a$, $b$ и $c$ параллельны?

Решение. $1^0$. Рассмотрим прямые $a$ и $b$. $\angle 1$ и $\angle 2$ — односторонние углы при пересечении прямых $a$ и $b$ секущей $d$ и $\angle 1 + \angle 2 = 42° + 140° = 182°$. Следовательно, прямые $a$ и $b$ не параллельны. В самом деле, если предположить, что $a \parallel b$, то по свойству односторонних углов (третья теорема п. 29 учебника) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, что противоречит условию задачи.

$2^0$. Рассмотрим прямые $a$ и $c$. $\angle 1$ и $\angle 3$ — односторонние углы при пересечении прямых $a$ и $c$ секущей $d$ и $\angle 1 + \angle 3 = 42° + 138° = 180°$. Следовательно, по признаку параллельности двух прямых $a \parallel c$.

$3^0$. Рассмотрим прямые $b$ и $c$. Углы 2 и 3 — соответственные углы при пересечении прямых $b$ и $c$ секущей $d$ и $\angle 2 \neq \angle 3$. Следовательно, прямые $b$ и $c$ не параллельны.

Ответ. $a \parallel c$.

**203.** Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых $a$ и $b$ секущей $c$, если: а) один из углов равен 150°; б) один из углов на 70° больше другого.

Решение. На рисунке 125 углы, указанные в условии задачи, обозначены цифрами.

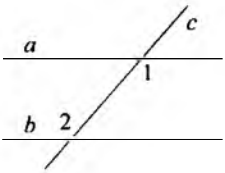


Рис. 123

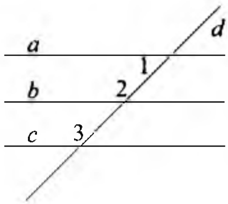


Рис. 124

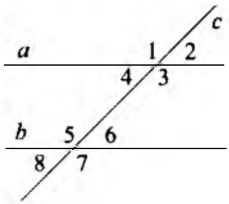


Рис. 125

Воспользуемся теоремами об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей. Имеем: $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 7$ как соответственные, а $\angle 5 = \angle 3$ как накрест лежащие углы при пересечении прямых $a$ и $b$ секущей $c$. Следовательно,

$$\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7. \tag{1}$$

Аналогично получим:

$$\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8. \tag{2}$$

а) По условию один из углов равен 150°. Пусть, например, $\angle 1 = 150°$. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, откуда $\angle 2 = 30°$. Из равенств (1) и (2) находим: $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 150°$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 30°$.

б) По условию один из углов на $70^\circ$ больше другого. Поэтому если один из них фигурирует в равенстве (1), то другой должен фигурировать в равенстве (2). Пусть, например, $\angle 1 = 70^\circ + \angle 2$. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Следовательно, $\angle 1 = 125^\circ$, $\angle 2 = 55^\circ$. Из равенств (1) и (2) получаем: $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 125^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 55^\circ$.

Ответ. а) Четыре угла по $150^\circ$, четыре угла по $30^\circ$; б) четыре угла по $125^\circ$, четыре угла по $55^\circ$.

**204.** Концы отрезка $AB$ лежат на параллельных прямых $a$ и $b$. Прямая, проходящая через середину $O$ этого отрезка, пересекает прямые $a$ и $b$ в точках $C$ и $D$. Докажите, что $CO = OD$.

Решение. Рассмотрим треугольники $AOC$ и $BOD$ (рис. 126). Имеем: $AO = OB$, так как точка $O$ — середина отрезка $AB$; $\angle 1 = \angle 2$, так как углы 1 и 2 — вертикальные; $\angle 3 = \angle 4$, так как углы 3 и 4 — накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых $a$ и $b$ секущей $AB$. Следовательно, треугольники $AOC$ и $BOD$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому $CO = OD$.

**205.** По данным рисунка 127 (рис. 117 учебника) найдите $\angle 1$.

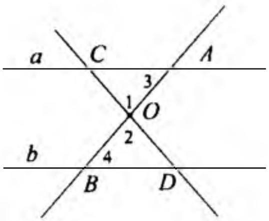


Рис. 126

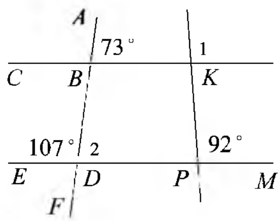


Рис. 127

Решение. Так как $\angle BDE$ и $\angle 2$ — смежные углы, то $\angle 2 = 180^\circ - \angle BDE = 73^\circ$, следовательно, $\angle ABK = \angle 2$. Углы $ABK$ и 2 — соответственные при пересечении прямых $CB$ и $ED$ секущей $AF$, поэтому $CB \parallel ED$. Угол 1 равен углу $KPM$, так как эти углы — соответственные при пересечении параллельных прямых $BK$ и $DM$ секущей $KP$. По условию $\angle KPM = 92^\circ$, поэтому $\angle 1 = 92^\circ$.

Ответ. $\angle 1 = 92^\circ$.

**206.** Угол $ABC$ равен $70^\circ$, а угол $BCD$ равен $110^\circ$. Могут ли прямые $AB$ и $CD$ быть: а) параллельными; б) пересекающимися?

Решение. Возможны два случая: точки $A$ и $D$ лежат по одну сторону от прямой $BC$ (рис. 128, *а*); точки $A$ и $D$ лежат по разные стороны от прямой $BC$ (рис. 128, *б*). В первом случае углы

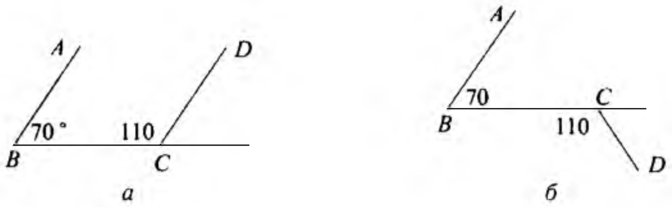


Рис. 128

$ABC$ и $BCD$ — односторонние углы при пересечении прямых $AB$ и $CD$ секущей $BC$, а так как $\angle ABC + \angle BCD = 70° + 110° = 180°$, то $AB \parallel CD$. Во втором случае углы $ABC$ и $BCD$ — накрест лежащие углы при пересечении прямых $AB$ и $CD$ секущей $BC$, а так как $\angle ABC \neq \angle BCD$, то прямые $AB$ и $CD$ не параллельны, т. е. пересекаются.

Ответ. а) Да; б) да.

**207.** Ответьте на вопросы задачи 206, если $\angle ABC = 65°$, а $\angle BCD = 105°$.

Решение. Решение задачи аналогично решению задачи 206. В первом случае прямые $AB$ и $CD$ не параллельны (рис. 129, *а*), так как $\angle ABC + \angle BCD \neq 180°$. Во втором случае прямые $AB$

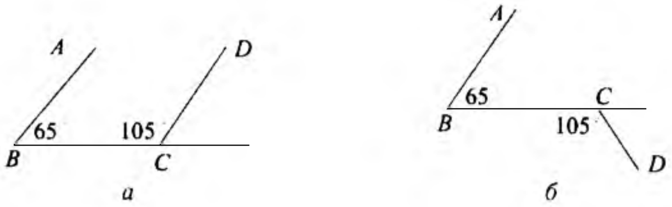


Рис. 129

и $CD$ не параллельны, так как $\angle ABC \neq \angle BCD$ (рис. 129, *б*). Таким образом, и в том, и в другом случае прямые $AB$ и $CD$ пересекаются.

Ответ. а) Нет; б) да.

**208.** Разность двух односторонних углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна $50°$. Найдите эти углы.

Решение. Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ — односторонние углы при пересечении параллельных прямых $a$ и $b$ секущей $c$. Тогда $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. По условию $\angle 1 - \angle 2 = 50°$, следовательно, $\angle 1 = 115°$, $\angle 2 = 65°$.

Ответ. $115°$ и $65°$.

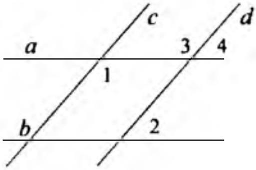


Рис. 130

**209.** На рисунке 130 (рис. 118 учебника) $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 4 = 45°$. Найдите углы 1, 2 и 3.

Решение. 1) $\angle 3$ и $\angle 4$ — смежные углы, поэтому $\angle 3 = 180° - \angle 4 = 135°$.

2) $\angle 1$ и $\angle 3$ — накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых $c$ и $d$ секущей $a$, следовательно, $\angle 1 = \angle 3 = 135°$.

3) $\angle 2$ и $\angle 4$ — соответственные углы при пересечении параллельных прямых $a$ и $b$ секущей $d$, следовательно, $\angle 2 = \angle 4 = 45°$.

Ответ. $\angle 1 = \angle 3 = 135°$, $\angle 2 = 45°$.

**210.** Два тела $P_1$ и $P_2$ подвешены на концах нити, перекинутой через блоки $A$ и $B$ (рис. 131, рис. 119 учебника). Третье тело $P_3$ подвешено на той же нити в точке $C$ и уравновешивает тела $P_1$ и $P_2$. (При этом $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$). Докажите, что $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

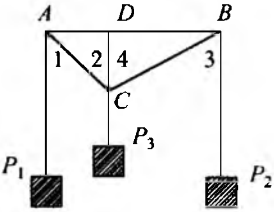


Рис. 131

Решение. Пусть прямая $CP_3$ пересекает отрезок $AB$ в точке $D$. Углы 1 и 2 — накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых $AP_1$ и $CP_3$ секущей $AC$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Углы 3 и 4 — накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых $BP_2$ и $CP_3$ секущей $BC$, поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Так как луч $CD$ проходит внутри угла $ACB$, то $\angle ACB = \angle 2 + \angle 4$, а значит, $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

**211.** Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что: а) биссектрисы накрест лежащих углов параллельны; б) биссектрисы соответственных углов параллельны; в) биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

Решение. а) Пусть $AB \parallel CD$ и лучи $BE$ и $CF$ — биссектрисы накрест лежащих углов $ABC$ и $BCD$ соответственно (рис. 132, $a$). Углы $ABC$ и $BCD$ — накрест лежащие углы при пересечении парал-

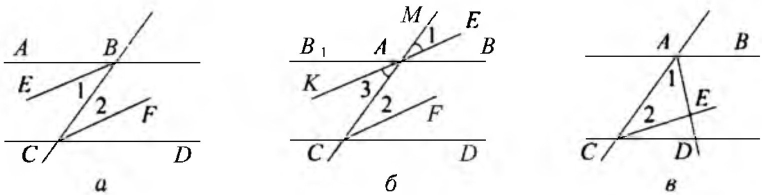


Рис. 132

лельных прямых $AB$ и $CD$ секущей $BC$, поэтому $\angle ABC = \angle BCD$. Лучи $BE$ и $CF$ — биссектрисы углов $ABC$ и $BCD$, поэтому $\angle 1 =$

$= \angle 2$. Равные углы 1 и 2 являются накрест лежащими углами при пересечении прямых $BE$ и $CF$ секущей $BC$, следовательно, $BE \parallel CF$, т. е. биссектрисы накрест лежащих углов параллельны.

б) Пусть $AB \parallel CD$, лучи $AE$ и $CF$ — биссектрисы соответственных углов $MAB$ и $ACD$ (рис. 132, *б*), а $AK$ — продолжение луча $AE$. Так как $AE$ — биссектриса угла $MAB$, то луч $AK$ — биссектриса вертикального с ним угла $B_1AC$. Поэтому $AE \parallel CF$ (см. задачу а).

в) Пусть лучи $AE$ и $CE$ — биссектрисы односторонних углов при пересечении параллельных прямых $AB$ и $CD$ секущей $AC$ (рис. 132, *в*). Поскольку $\angle BAC + \angle ACD = 180°$ (эти углы односторонние), то

$$\angle 1 + \angle 2 = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ACD}{2} = 90°.$$

Следовательно, треугольник $AEC$ — прямоугольный с прямым углом $E$. Но это и означает, что биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

## Дополнительные задачи

**213.** На рисунке 133 (рис. 121 учебника) $CE = ED$, $BE = EF$ и $KE \parallel AD$. Докажите, что $KE \parallel BC$.

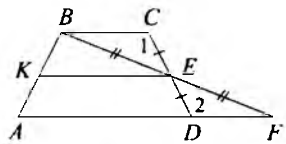

Рис. 133

Решение. Треугольники $BEC$ и $FED$ равны по двум сторонам и углу между ними ($BE = FE$, $CE = ED$ по условию и $\angle BEC = \angle FED$, так как эти углы — вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $\angle 1 = \angle 2$. Но углы 1 и 2 — накрест лежащие при пересечении прямых $BC$ и $AD$ секущей $CD$, поэтому $BC \parallel AD$. Итак, по условию $KE \parallel AD$, по доказанному $BC \parallel AD$. Следовательно (согласно следствию 2° из аксиомы параллельных прямых), $KE \parallel BC$.

**214.** Прямая, проходящая через середину биссектрисы $AD$ треугольника $ABC$ и перпендикулярная к $AD$, пересекает сторону $AC$ в точке $M$. Докажите, что $MD \parallel AB$.

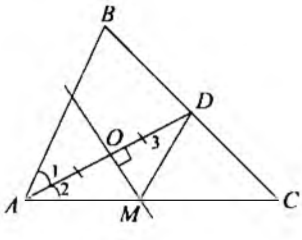

Рис. 134

Решение. В треугольнике $AMD$ (рис. 134) отрезок $MO$ является медианой (так как прямая $MO$ проходит через середину отрезка $AD$) и высотой (так как $MO \perp AD$), поэтому треугольник $AMD$ — равнобедренный с основанием $AD$, а значит, $\angle 2 = \angle 3$. Поскольку $AD$ — биссектриса угла $A$, то $\angle 2 = \angle 1$. Но $\angle 2 = \angle 3$, поэтому $\angle 1 = \angle 3$. Углы 1 и 3 — накрест лежащие углы при пересечении прямых $AB$ и $DM$ секущей $AD$. Следовательно, $AB \parallel DM$.

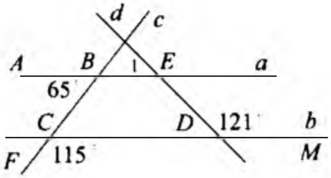


Рис. 135

**215.** По данным рисунка 135 (рис. 122 учебника) найдите угол 1.

Решение. Углы $FCD$ и $BCD$ — смежные, поэтому $\angle BCD = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$. Отсюда следует, что $\angle ABC = \angle BCD = 65^\circ$. Углы $ABC$ и $BCD$ — накрест лежащие при пересечении прямых $AB$ и $CD$ секущей $BC$, поэтому $AB \parallel CD$. Углы $EDC$ и $EDM$ — смежные, следовательно, $\angle EDC = 180^\circ - 121^\circ = 59^\circ$. Углы 1 и $EDC$ — соответственные углы при пересечении параллельных прямых $AB$ и $CD$ секущей $ED$, поэтому $\angle 1 = \angle EDC = 59^\circ$.

Ответ. $59^\circ$.

**216.** На рисунке 136 (рис. 123 учебника) $DE$ — биссектриса угла $ADF$. По данным рисунка найдите углы треугольника $ADE$.

Решение. Углы $MAB$ и $CBA$ — односторонние углы при пересечении прямых $AE$ и $BF$ секущей $AB$ и $\angle MAB + \angle CBA = 78^\circ + 102^\circ = 180^\circ$, следовательно, $AE \parallel BF$. $\angle 1 = \angle ADB = 48^\circ$, так как $\angle 1$ и $\angle ADB$ — накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых $AE$ и $BD$ секущей $AD$. Углы $ADB$ и $ADF$ — смежные, поэтому $\angle ADF = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$.

Так как по условию луч $DE$ — биссектриса угла $ADF$, то $\angle 2 = \angle 4 = 66^\circ$. Углы 3 и 4 — накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых $AE$ и $BF$ секущей $DE$. Следовательно, $\angle 3 = \angle 4 = 66^\circ$. Итак, в треугольнике $ADE$ $\angle A = 48^\circ$, $\angle D = \angle E = 66^\circ$.

Ответ. $48^\circ$, $66^\circ$, $66^\circ$.

**217.** Прямые $a$ и $b$ параллельны прямой $c$. Докажите, что любая прямая, пересекающая прямую $a$, пересекает также и прямую $b$.

Решение. По условию $a \parallel c$ и $b \parallel c$, следовательно (согласно следствию 2° из аксиомы параллельных прямых), $a \parallel b$ (рис. 137). По условию прямая $m$ пересекает прямую $a$, а значит (согласно следствию 1°

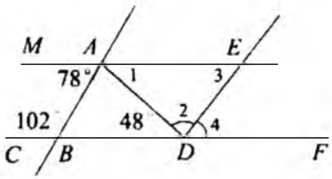


Рис. 136

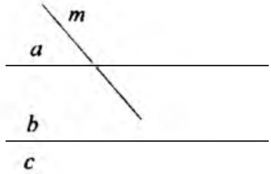


Рис. 137

из аксиомы параллельных прямых), она пересекает и параллельную ей прямую $b$.

**218.** Прямые $a$ и $b$ пересекаются. Можно ли провести такую прямую, которая пересекает прямую $a$ и параллельна прямой $b$? Ответ обоснуйте.

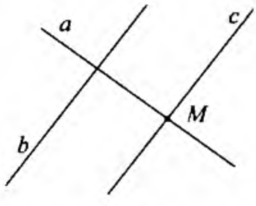


Рис. 138

Решение. На прямой $a$ отметим точку $M$, не лежащую на прямой $b$, и проведем через нее прямую $c$, параллельную прямой $b$ (рис. 138). Прямые $a$ и $c$ не совпадают, так как прямая $a$ пересекает прямую $b$, а $c \parallel b$. Таким образом, прямая $c$ пересекает прямую $a$ и параллельна прямой $b$.

Ответ. Да.

**219*.** Даны две прямые $a$ и $b$. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую $a$, пересекает и прямую $b$, то прямые $a$ и $b$ параллельны.

Решение. Предположим, что прямые $a$ и $b$ не параллельны, т. е. пересекаются. Тогда можно провести такую прямую $c$, которая пересекает прямую $a$ и не пересекает прямую $b$ (задача 218). Но это противоречит условию задачи. Значит, наше предположение неверно, и $a \parallel b$.

**220.** Докажите, что если при пересечении двух прямых $a$ и $b$ секущей накрест лежащие углы не равны, то прямые $a$ и $b$ пересекаются.

Решение. Пусть при пересечении прямых $a$ и $b$ секущей $c$ накрест лежащие углы 1 и 2 не равны (рис. 139). Предположим, что $a \parallel b$. Тогда по первой теореме п. 29 накрест лежащие углы равны, т. е. $\angle 1 = \angle 2$, что противоречит условию задачи. Значит, наше предположение неверно, и прямые $a$ и $b$ пересекаются.

**221.** Даны треугольник $ABC$ и точки $M$ и $N$, такие, что середина отрезка $BM$ совпадает с серединой стороны $AC$, а середина отрезка $CN$ — с серединой стороны $AB$. Докажите, что точки $M$, $N$ и $A$ лежат на одной прямой.

Решение. Поскольку середины отрезков $AB$ и $CN$ совпадают (рис. 140), то $AN \parallel BC$ (см. задачу 188). Аналогично, середины

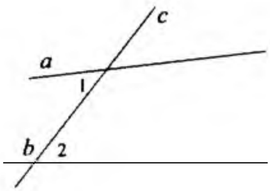


Рис. 139

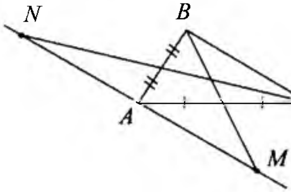


Рис. 140

отрезков $BM$ и $AC$ совпадают, поэтому $AM \parallel BC$. Таким образом, через точку $A$ проходят прямые $AM$ и $AN$, параллельные прямой $BC$. Но через точку $A$ можно провести только одну прямую, параллельную прямой $BC$. Поэтому прямые $AM$ и $AN$ совпадают, т. е. точки $M$, $A$ и $N$ лежат на одной прямой.

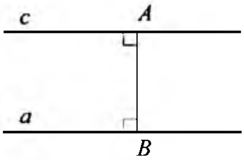


Рис. 141

**222.** Даны прямая $a$ и точка $A$, не лежащая на ней. С помощью циркуля и линейки через точку $A$ проведите прямую, параллельную прямой $a$.

Решение. Через точку $A$ (рис. 141) проведем прямую $AB$, перпендикулярную прямой $a$ (задача 153). Затем через точку $A$ проведем прямую $c$, перпендикулярную к прямой $AB$. Прямые $c$ и $a$ параллельны. Действительно, по построению $c \perp AB$ и $a \perp AB$, значит, $a \parallel c$ (п. 12).

Глава 4

# СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

## § 1. Сумма углов треугольника

**223.** Найдите угол $C$ треугольника $ABC$, если: а) $\angle A = 65°$, $\angle B = 57°$; б) $\angle A = 24°$, $\angle B = 130°$; в) $\angle A = \alpha$, $\angle B = 2\alpha$; г) $\angle A = 60° + \alpha$, $\angle B = 60° - \alpha$.

Решение. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, откуда $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$. Поэтому:

а) $\angle C = 180° - 65° - 57° = 58°$;
б) $\angle C = 180° - 24° - 130° = 26°$;
в) $\angle C = 180° - \alpha - 2\alpha = 180° - 3\alpha$;
г) $\angle C = 180° - 60° - \alpha - 60° + \alpha = 60°$.

Ответ. а) $58°$; б) $26°$; в) $180° - 3\alpha$; г) $60°$.

**224.** Найдите углы треугольника $ABC$, если $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$.

Решение. Из условия задачи следует, что $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 3\alpha$, $\angle C = 4\alpha$, где $\alpha$ — некоторый угол (рис. 142). Поскольку $\angle A + \angle B + \angle C = 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 9\alpha = 180°$, то $\alpha = \frac{180°}{9} = 20°$, а значит, $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$.

Ответ. $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$.

**225.** Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен $60°$.

Решение. Все углы равностороннего треугольника равны друг другу и составляют в сумме $180°$. Поэтому каждый из них равен $\frac{180°}{3} = 60°$.

**226.** Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника — острые.

Решение. Пусть $\alpha$ — угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию (рис. 143). Поскольку сумма углов треугольника равна 180°, то сумма двух углов при основании равна $180° - \alpha$, а значит, каждый из них равен

$$\frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} < 90°.$$

**227.** Найдите углы равнобедренного треугольника, если: а) угол при основании в два раза больше угла, противолежащего основанию; б) угол при основании в три раза меньше внешнего угла, смежного с ним.

Решение. а) Из условия задачи следует, что если $\alpha$ — угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию (см. рис. 143), то углы при его основании равны $2\alpha$. Имеем: $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180°$, откуда $\alpha = 36°$. Таким образом, угол при вершине равен 36°, а углы при основании $2 \cdot 36° = 72°$.

б) Пусть $\alpha$ — угол при основании данного равнобедренного треугольника (рис. 144). Поскольку смежные углы составляют в сумме

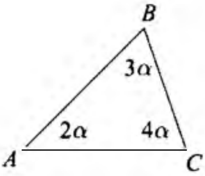


Рис. 142

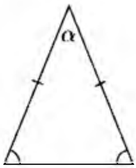


Рис. 143

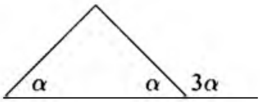


Рис. 144

180°, то $\alpha + 3\alpha = 4\alpha = 180°$, откуда $\alpha = 45°$. Итак, углы при основании равнобедренного треугольника равны 45°, а значит, угол при его вершине, противолежащей основанию, равен $180° - 45° - 45° = 90°$.

Ответ. а) 36°, 72°, 72°; б) 45°, 45°, 90°.

**228.** Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен: а) 40°; б) 60°; в) 100°.

Решение. а) Если данный угол в 40° лежит при основании равнобедренного треугольника, то другой угол при основании также равен 40°, а значит, угол при вершине, противолежащей основанию, равен $180° - 40° - 40° = 100°$; если же данный угол в 40° лежит при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, то сумма углов при его основании равна $180° - 40° = 140°$, а значит, каждый из них равен $\dfrac{140°}{2} = 70°$.

б) Если данный угол в 60° лежит при основании равнобедренного треугольника, то другой угол при основании также равен 60°, а значит, угол при вершине равен $180° - 60° - 60° = 60°$; если предположить, что данный угол лежит при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, мы получим, очевидно, тот же результат.

в) Угол при основании равнобедренного треугольника не может быть тупым (задача 226), поэтому данный угол в $100°$ является углом при его вершине, противолежащей основанию. Следовательно, углы при основании равны

$$\frac{180° - 100°}{2} = 40°.$$

Ответ. а) $40°$, $40°$ и $100°$ или $40°$, $70°$ и $70°$; б) $60°$, $60°$ и $60°$; в) $100°$, $40°$ и $40°$.

**229.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ проведена биссектриса $AD$. Найдите $\angle ADC$, если $\angle C = 50°$.

Решение. Поскольку $AD$ — биссектриса (рис. 145), то $\angle CAD = \frac{50°}{2} = 25°$, а значит,

$$\angle ADC = 180° - 50° - 25° = 105°.$$

Ответ. $105°$.

**230.** Биссектрисы углов $A$ и $B$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 58°$, $\angle B = 96°$.

Решение. Поскольку $AM$ и $BM$ — биссектрисы (рис. 146), то

$$\angle MAB = \frac{58°}{2} = 29°, \quad \angle MBA = \frac{96°}{2} = 48°,$$

а значит,

$$\angle AMB = 180° - 29° - 48° = 103°.$$

Ответ. $103°$.

**231.** Медиана $AM$ треугольника $ABC$ равна половине стороны $BC$. Докажите, что треугольник $ABC$ — прямоугольный.

Решение. Из условия задачи следует, что треугольники $ABM$ и $ACM$ — равнобедренные (рис. 147), поэтому углы при основании каждого из них равны. Следовательно, $\angle A = \angle B + \angle C$. С другой стороны,

$$\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 180° - \angle A,$$

откуда находим: $\angle A = 90°$.

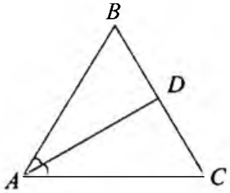


Рис. 145

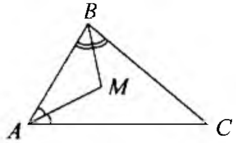


Рис. 146

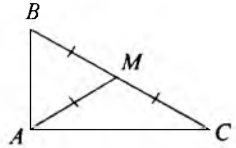


Рис. 147

**232.** Докажите, что если один из внешних углов треугольника в два раза больше угла треугольника, не смежного с ним, то треугольник равнобедренный. Верно ли обратное утверждение?

Решение. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. Поэтому если он в два раза больше одного из них, то он в два раза больше и другого. Следовательно, указанные углы равны, а значит, треугольник равнобедренный (см. следствие 2 п. 32).

Справедливо и обратное утверждение: в равнобедренном треугольнике один из внешних углов в два раза больше угла треугольника, не смежного с ним. В самом деле, внешний угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, равен сумме двух углов при его основании, а значит, он в два раза больше каждого из них.

Ответ. Да.

**233.** Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.

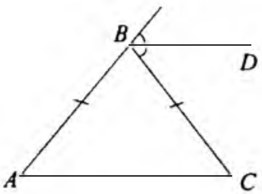


Рис. 148

Решение. Пусть $BD$ — биссектриса внешнего угла равнобедренного треугольника $ABC$ с основанием $AC$ (рис. 148). Указанный внешний угол равен сумме двух углов при основании и, следовательно, в два раза больше каждого из них. Поэтому $\angle CBD = \angle ACB$. Но углы $CBD$ и $ACB$ — накрест лежащие при пересечении прямых $AC$ и $BD$ секущей $BC$, значит, прямые $AC$ и $BD$ параллельны.

**234.** Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен $115°$. Найдите углы треугольника.

Решение. Из условия задачи следует, что угол треугольника, смежный с данным внешним углом, равен $180° - 115° = 65°$.

Если этот угол лежит при основании равнобедренного треугольника, то другой угол при основании также равен $65°$, а значит, угол при вершине, противолежащей основанию, равен $180° - 65° - 65° = 50°$; если же этот угол лежит при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, то сумма углов при его основании равна $180° - 65° = 115°$, а значит, каждый из них равен $\frac{115°}{2} = 57°30'$.

Ответ: $57°30'$, $57°30'$ и $65°$ или $65°$, $65°$ и $50°$.

**235.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ проведена биссектриса $AD$. Найдите углы этого треугольника, если $\angle ADB = 110°$.

Решение. Угол $ADB$ является внешним углом треугольника $ACD$ (рис. 149), поэтому он равен сумме двух углов этого треугольника, не смежных с ним. Кроме того, поскольку $AD$ — биссектриса, то $\angle CAD = \frac{\angle C}{2}$. Таким образом, $\angle C + \frac{\angle C}{2} = 110°$, откуда $\angle C = 73°20'$. Следовательно, $\angle A = \angle C = 73°20'$, $\angle B = 180° - 73°20' - 73°20' = 33°20'$.

Ответ. $73°20'$, $73°20'$ и $33°20'$.

## § 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника

**236.** Сравните углы треугольника $ABC$ и выясните, может ли быть угол $A$ тупым, если: а) $AB > BC > AC$; б) $AB = AC < BC$.

Решение. В тупоугольном треугольнике тупой угол больше каждого их двух других углов, поэтому против тупого угла лежит наибольшая из трех сторон. Следовательно:

а) поскольку сторона $BC$ не является наибольшей, то угол $A$ не может быть тупым;

б) поскольку сторона $BC$ является наибольшей, то угол $A$ может быть тупым.

Ответ. а) Не может; б) может.

**237.** Сравните стороны треугольника $ABC$, если: а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A > \angle B = \angle C$.

Решение. В треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона. Поэтому:

а) $BC > CA > AB$; б) $BC > CA = AB$.

**238.** Докажите, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий любую точку основания, отличную от вершины, с противоположной вершиной, меньше боковой стороны.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник $ABC$, на основании $AC$ которого взята точка $D$, отличная от вершины (рис. 150). Смежные углы $ADB$ и $CDB$ составляют в сумме $180°$, поэтому один из них тупой или прямой. Пусть, например, угол $ADB$ тупой или прямой. Тогда в треугольнике $ADB$ против этого угла лежит наибольшая сторона. Следовательно, $AB > BD$.

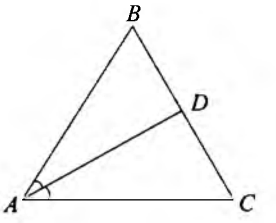

Рис. 149

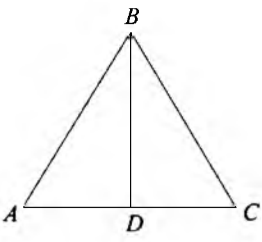

Рис. 150

**239.** Докажите, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведенной из той же вершины.

Решение. Рассмотрим треугольник $ABC$, в котором проведены высота $BH$ и медиана $BM$ (рис. 151). Если точки $H$ и $M$ совпадают, то высота равна медиане. Если же точки $H$ и $M$ не совпадают, то в прямоугольном треугольнике $BHM$ гипотенуза $BM$ больше катета $BH$, т. е. медиана больше высоты.

**240.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ биссектрисы углов $A$ и $C$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что треугольник $AOC$ — равнобедренный.

Решение. Углы $A$ и $C$ треугольника $AOC$ в два раза меньше углов $A$ и $C$ треугольника $ABC$ (рис. 152). Следовательно, углы $A$

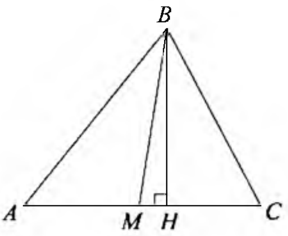


Рис. 151

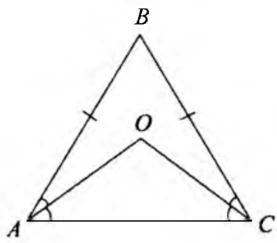


Рис. 152

и $C$ треугольника $AOC$ равны друг другу, а значит, этот треугольник равнобедренный.

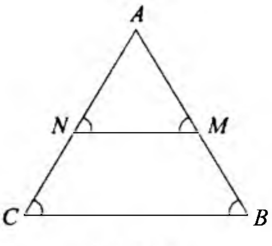


Рис. 153

**241.** Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника $ABC$, пересекает боковые стороны $AB$ и $AC$ в точках $M$ и $N$. Докажите, что треугольник $AMN$ — равнобедренный.

Решение. Углы $M$ и $N$ треугольника $AMN$ (рис. 153) равны углам $B$ и $C$ треугольника $ABC$ как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых $BC$ и $MN$ секущими $AB$ и $AC$. Следовательно, углы $M$ и $N$ треугольника $AMN$ равны друг другу, а значит, этот треугольник — равнобедренный.

**242.** Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне треугольника, то треугольник равнобедренный.

Решение. Рассмотрим треугольник $ABC$, биссектриса $BD$ внешнего угла которого параллельна стороне $AC$ (рис. 154). Углы $CBD$ и $ACB$ равны как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых $AC$ и $BD$ секущей $BC$, поэтому внешний угол при вершине $B$ треугольника $ABC$ в два раза больше угла $C$ этого треугольника. С другой стороны, указанный внешний угол равен сумме углов $A$ и $C$ треугольника $ABC$. Следовательно, $\angle A = \angle C$, а значит, треугольник $ABC$ — равнобедренный.

**243.** Через вершину $C$ треугольника $ABC$ проведена прямая, параллельная его биссектрисе $AA_1$ и пересекающая прямую $AB$ в точке $D$. Докажите, что $AC = AD$.

Решение. Углы $A_1AC$ и $ACD$ (рис. 155) равны как накрест

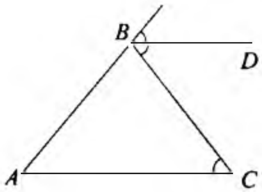


Рис. 154

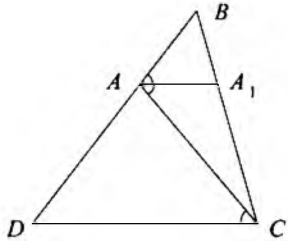


Рис. 155

лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых $AA_1$ и $CD$ секущей $AC$, поэтому внешний угол при вершине $A$ треугольника $ACD$ в два раза больше угла $C$ этого треугольника. С другой стороны, указанный внешний угол равен сумме углов $C$ и $D$ треугольника $ACD$. Следовательно, $\angle C = \angle D$, а значит, $AC = AD$.

**244.** Отрезок $AD$ — биссектриса треугольника $ABC$. Через точку $D$ проведена прямая, параллельная $AC$ и пересекающая сторону $AB$ в точке $E$. Докажите, что треугольник $ADE$ — равнобедренный.

Решение. Углы $CAD$ и $ADE$ (рис. 156) равны как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых $AC$ и $DE$ секущей $AD$. Следовательно, в треугольнике $ADE$ $\angle A = \angle D$, а значит, треугольник $ADE$ — равнобедренный.

**245.** Через точку пересечения биссектрис $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ проведена прямая, параллельная прямой $BC$ и пересекающая стороны $AB$ и $AC$ соответственно в точках $M$ и $N$. Докажите, что $MN = BM + CN$.

Решение. Пусть точка $O$ — точка пересечения биссектрис $BB_1$ и $CC_1$ (рис. 157). Углы $BOM$ и $CBO$ равны как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых $OM$ и $BC$ секущей $BO$. Следовательно, в треугольнике $BOM$ $\angle B = \angle O$, а значит, $OM = BM$.

Углы $NOC$ и $OCB$ равны как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых $ON$ и $BC$ секущей $CO$. Следовательно, в треугольнике $CON$ $\angle C = \angle O$, а значит, $ON = CN$.

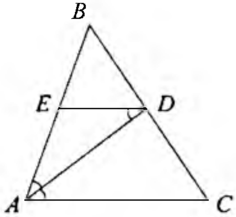


Рис. 156

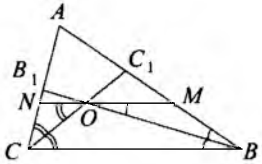


Рис. 157

Итак, $OM = BM$, $ON = CN$. Поэтому

$$MN = OM + ON = BM + CN.$$

**246.** На рисунке 158 (рис. 129 учебника) лучи $BO$ и $CO$ — биссектрисы углов $B$ и $C$ треугольника $ABC$, $OE \parallel AB$, $OD \parallel AC$. Докажите, что периметр треугольника $EDO$ равен длине отрезка $BC$.

Решение. Углы $BOE$ и $ABO$ равны как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых $OE$ и $AB$ секущей $BO$. Следовательно, в треугольнике $BOE$ $\angle B = \angle O$, а значит, $OE = BE$.

Углы $DOC$ и $ACO$ равны как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых $OD$ и $AC$ секущей $CO$. Следовательно, в треугольнике $COD$ $\angle C = \angle O$, а значит, $OD = CD$.

Итак, $OE = BE$, $OD = CD$. Поэтому

$$OE + ED + DO = BE + ED + CD = BC.$$

**247.** На рисунке 159 (рис. 130 учебника) $AB = AC$, $AP = AQ$. Докажите, что: а) треугольник $BOC$ — равнобедренный; б) прямая $OA$ проходит через середину основания $BC$ и перпендикулярна к нему.

Решение. а) Поскольку $AB = AC$ и $AP = AQ$, то $BP = CQ$. Следовательно, треугольники $CBP$ и $BCQ$ равны по первому признаку равенства треугольников ($BP = CQ$, сторона $BC$ у них общая, а углы $CBP$ и $BCQ$ равны как углы при основании равнобедренного

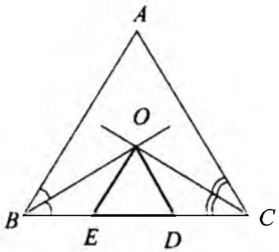


Рис. 158

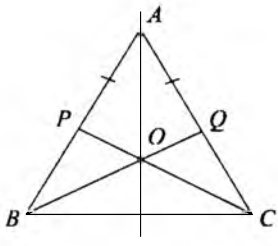


Рис. 159

треугольника $ABC$). Поэтому углы $B$ и $C$ треугольника $BOC$ равны, а значит, этот треугольник — равнобедренный.

б) Из рассуждений, приведенных в части а) решения, следует, что $BO = OC$. Следовательно, треугольники $ABO$ и $ACO$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Поэтому луч $AO$ является биссектрисой угла $A$. Но в равнобедренном треугольнике $ABC$ биссектриса угла $A$ является медианой и высотой. Таким образом, прямая $OA$ проходит через середину основания $BC$ и перпендикулярна к нему.

**248.** Существует ли треугольник со сторонами: а) 1 м, 2 м и 3 м; б) 1,2 дм, 1 дм и 2,4 дм?

Решение. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Имеем:

а) 1 м + 2 м = 3 м, поэтому треугольника со сторонами 1 м, 2 м и 3 м не существует;

б) 1,2 дм + 1 дм = 2,2 дм < 2,4 дм, поэтому треугольника со сторонами 1,2 дм, 1 дм и 2,4 дм не существует.

Ответ. а) Нет; б) нет.

**249.** В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая равна 10 см. Какая из них является основанием?

Решение. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Поэтому если предположить, что основанием является сторона, равная 25 см, то получится противоречие: 10 см + 10 см = = 20 см < 25 см. Следовательно, основанием является сторона, равная 10 см.

Ответ. Сторона, равная 10 см.

**250.** Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 5 см и 3 см; б) 8 см и 2 см; в) 10 см и 5 см.

Решение. а) Если сторона, равная 5 см, является боковой стороной данного треугольника, то неизвестная сторона также равна 5 см; если же боковой стороной данного треугольника является сторона, равная 3 см, то неизвестная сторона также равна 3 см.

б) Поскольку данный треугольник равнобедренный, то его неизвестная сторона равна либо 8 см, либо 2 см. Если предположить, что она равна 2 см, то получится противоречие: 2 см + 2 см = 4 см < < 8 см (в то время как каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон). Следовательно, эта сторона равна 8 см.

в) Поскольку данный треугольник равнобедренный, то его неизвестная сторона равна либо 10 см, либо 5 см. Если предположить, что она равна 5 см, то получится противоречие: 5 см + 5 см = 10 см (в то время как каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон). Следовательно, эта сторона равна 10 см.

Ответ. а) 5 см или 3 см; б) 8 см; в) 10 см.

**252.** Два внешних угла треугольника при разных вершинах равны. Периметр треугольника равен 74 см, а одна из его сторон равна 16 см. Найдите две другие стороны треугольника.

Решение. Смежные углы составляют в сумме 180°, поэтому если два внешних угла треугольника при разных вершинах равны, то равны и углы треугольника при этих вершинах, а значит, данный треугольник — равнобедренный.

Сторона, равная 16 см, может быть либо основанием, либо боковой стороной этого треугольника. Но боковой стороной она быть не может: иначе стороны треугольника были бы равны

$$16 \text{ см}, 16 \text{ см} \text{ и } 74 \text{ см} - 16 \text{ см} - 16 \text{ см} = 42 \text{ см},$$
$$\text{а } 16 \text{ см} + 16 \text{ см} = 32 \text{ см} < 42 \text{ см},$$

в то время как каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Следовательно, эта сторона является основанием, а значит, каждая из боковых сторон равна

$$\frac{74 \text{ см} - 16 \text{ см}}{2} = 29 \text{ см}.$$

Ответ. 29 см и 29 см.

**253.** Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см, разность двух сторон равна 4 см, а один из его внешних углов — острый. Найдите стороны треугольника.

Решение. Смежные углы составляют в сумме 180°, поэтому если один из внешних углов треугольника острый, то угол треугольника при этой вершине тупой. Поскольку данный треугольник равнобедренный, то тупым является угол между его боковыми сторонами (углы при основании равнобедренного треугольника равны, а тупым может быть только один угол треугольника), а значит, основание является наибольшей из его сторон. Таким образом, если каждая из боковых сторон равна $x$, то сторона основания равна $x + 4$ см. Периметр треугольника равен

$$x + x + (x + 4 \text{ см}) = 25 \text{ см},$$

откуда $3x = 21$ см, $x = 7$ см, $x + 4 = 11$ см. Итак, стороны треугольника равны 7 см, 7 см и 11 см.

Ответ. 7 см, 7 см и 11 см.

## § 3. Прямоугольные треугольники

**254.** Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

Решение. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, а поскольку данный треугольник равнобедренный, то его острые углы равны друг другу. Следовательно, углы этого треугольника равны 45°, 45° и 90°.

Ответ. 45°, 45° и 90°.

**255.** В равнобедренном треугольнике $CDE$ с основанием $CE$ проведена высота $CF$. Найдите $\angle ECF$, если $\angle D = 54°$.

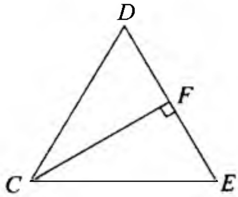


Рис. 160

Решение. Поскольку данный треугольник равнобедренный, то $\angle C = \angle E$, а значит, $2\angle E + \angle D = 180°$ (рис. 160), откуда

$$\angle E = \frac{180° - \angle D}{2} = \frac{180° - 54°}{2} = 63°.$$

Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника $CEF$ равна $90°$, поэтому

$$\angle ECF = 90° - 63° = 27°.$$

Ответ. $27°$.

**256.** Один из углов прямоугольного треугольника равен $60°$, а сумма гипотенузы и меньшего из катетов равна 26,4 см. Найдите гипотенузу треугольника.

Решение. Один из острых углов данного треугольника равен $60°$, а значит, другой его острый угол равен $90° - 60° = 30°$. Угол в $30°$ меньше угла в $60°$, поэтому меньший катет лежит против угла в $30°$ и, следовательно, равен половине гипотенузы. Таким образом, если длина гипотенузы равна $x$, то

$$x + \frac{x}{2} = 26{,}4 \text{ см, откуда } x = 17{,}6 \text{ см.}$$

Ответ. 17,6 см.

**257.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ внешний угол при вершине $A$ равен $120°$, $AC + AB = 18$ см. Найдите $AC$ и $AB$.

Решение. Смежные углы составляют в сумме $180°$, поэтому угол $A$ треугольника $ABC$ равен $180° - 120° = 60°$, а значит, его угол $B$ равен $90° - 60° = 30°$. Следовательно, катет $AC$ равен половине гипотенузы $AB$. Учитывая, что $AC + AB = 18$ см, получаем: $AC = 6$ см, $AB = 12$ см.

Ответ. $AC = 6$ см, $AB = 12$ см.

**258.** Из середины $D$ стороны $BC$ равностороннего треугольника $ABC$ проведен перпендикуляр $DM$ к стороне $AC$. Найдите $AM$, если $AB = 12$ см.

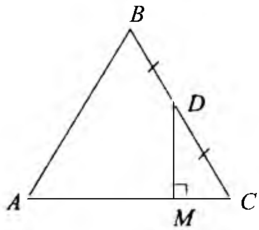


Рис. 161

Решение. В равностороннем треугольнике все углы равны $60°$. Поэтому в прямоугольном треугольнике $DMC$ (рис. 161) угол $D$ равен $90° - 60° = 30°$. Следовательно, $MC = \frac{DC}{2} = \frac{BC}{4} = \frac{AB}{4} = 3$ см, а значит, $AM = 12$ см $- 3$ см $= 9$ см.

Ответ. 9 см.

**259.** Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен $120^\circ$. Высота, проведенная к боковой стороне, равна 9 см. Найдите основание треугольника.

Решение. Каждый из углов при основании данного треугольника равен $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Поэтому проведенная высота является катетом прямоугольного треугольника, лежащим против угла в $30^\circ$, а основание данного треугольника — гипотенузой. Следовательно, искомое основание равно $2 \cdot 9$ см $= 18$ см.

Ответ. 18 см.

**260.** Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 7,6 см, а боковая сторона треугольника равна 15,2 см. Найдите углы этого треугольника.

Решение. Проведенная высота является катетом прямоугольного треугольника, а боковая сторона — его гипотенузой. Поскольку 15,2 см $= 2 \cdot 7{,}6$ см, то гипотенуза этого треугольника в два раза больше катета, а значит, угол, лежащий против этого катета, равен $30^\circ$. Но этот угол является углом при основании данного треугольника. Поэтому углы данного треугольника равны $30^\circ$, $30^\circ$ и $180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

Ответ. $30^\circ$, $30^\circ$ и $120^\circ$.

**261.** Докажите, что в равнобедренном треугольнике две высоты, проведенные из вершин основания, равны.

Решение. Указанные высоты являются катетами прямоугольных треугольников с общей гипотенузой — основанием данного треугольника — и равными острыми углами — углами при основании данного треугольника. Поэтому эти прямоугольные треугольники равны, а значит, равны и указанные высоты.

**262.** В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ углы $A$ и $A_1$ — прямые, $BD$ и $B_1D_1$ — биссектрисы. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle B = \angle B_1$ и $BD = B_1D_1$.

Решение. Поскольку $\angle B = \angle B_1$ и $BD$ и $B_1D_1$ — биссектрисы (рис. 162), то $\angle DBA = \angle D_1B_1A_1$, а значит, прямоугольные треугольники $ABD$ и $A_1B_1D_1$ равны по гипотенузе и острому углу.

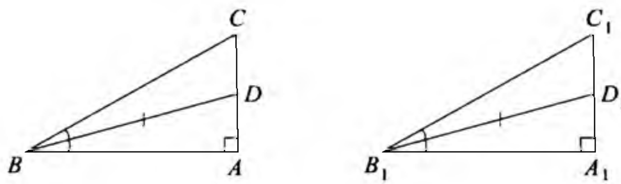


Рис. 162

Следовательно, $AB = A_1B_1$. Поэтому треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны по катету и прилежащему к нему острому углу.

**263.** Высоты, проведенные к боковым сторонам $AB$ и $AC$ остроугольного равнобедренного треугольника $ABC$, пересекаются в точке $M$. Найдите углы треугольника, если $\angle BMC = 140°$.

Решение. Пусть $H$ — основание высоты, проведенной из вершины $B$ (рис. 163). Угол $BMC$, будучи внешним углом прямоугольного треугольника $CMH$, равен сумме его углов при вершинах $C$ и $H$. Поэтому $\angle HCM = 140° - 90° = 50°$, а значит, $\angle A = 90° - \angle HCM = 40°$. Следовательно, каждый из углов $B$ и $C$ треугольника $ABC$ равен

$$\frac{180° - 40°}{2} = 70°.$$

Ответ. 70°, 70° и 40°.

**264.** Высоты $AA_1$ и $BB_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 55°$, $\angle B = 67°$.

Решение. Из прямоугольных треугольников $AA_1B$ и $ABB_1$ (рис. 164) находим: $\angle A_1AB = 90° - \angle B = 90° - 67° = 23°$, $\angle B_1BA = 90° - 55° = 35°$. Поэтому угол $AMB$ можно найти из треугольника $AMB$:

$$\angle AMB = 180° - 23° - 35° = 122°.$$

Ответ. 122°.

**265.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ проведены биссектриса $AF$ и высота $AH$. Найдите углы треугольника $AHF$, если $\angle B = 112°$.

Решение. В равнобедренном треугольнике $ABC$ угол $B$ равен 112° (рис. 165), поэтому каждый из углов $A$ и $C$ равен $\frac{180° - 112°}{2} = 34°$. Следовательно, угол $BAF$ равен $\frac{34°}{2} = 17°$. Из треугольника $BAF$ находим угол $F$ треугольника $AHF$: $\angle F = 180° - \angle B - \angle BAF =$

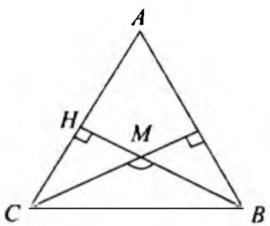

Рис. 163

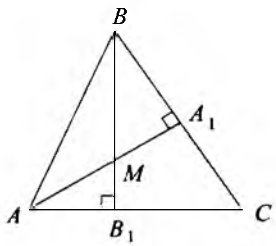

Рис. 164

$= 180° - 112° - 17° = 51°$. Таким образом, углы прямоугольного треугольника $AHF$ равны $51°$, $90°$ и $90° - 51° = 39°$.

Ответ. $90°$, $39°$ и $51°$.

**266.** На сторонах угла $O$ отмечены точки $A$ и $B$ так, что $OA = OB$. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке $C$. Докажите, что луч $OC$ — биссектриса угла $O$.

Решение. Прямоугольные треугольники $OAC$ и $OBC$ (рис. 166) равны: гипотенуза $OC$ у них общая, а катеты $OA$ и $OB$ равны по условию задачи. Следовательно, $\angle AOC = \angle BOC$, а это и означает, что луч $OC$ — биссектриса угла $O$.

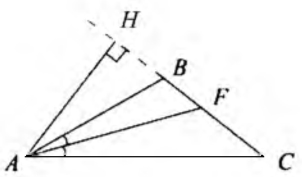


Рис. 165

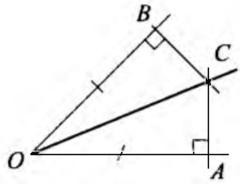


Рис. 166

**267.** Докажите, что два остроугольных треугольника равны, если сторона и высоты, проведенные из концов этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и высотам, проведенным из концов этой стороны, другого треугольника.

Решение. Рассмотрим остроугольные треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ с высотами $AD$, $CE$ и $A_1D_1$, $C_1E_1$ (рис. 167), у которых $AC = A_1C_1$, $AD = A_1D_1$, $CE = C_1E_1$. Прямоугольные треугольники

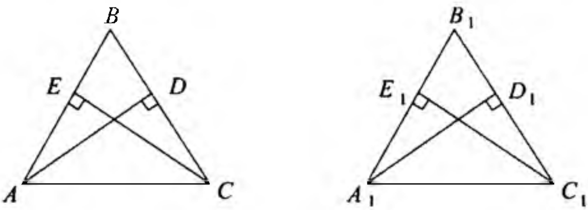


Рис. 167

$ACE$ и $A_1C_1E_1$ равны по гипотенузе и катету, поэтому углы $A$ и $A_1$ этих треугольников равны. Прямоугольные треугольники $ACD$ и $A_1C_1D_1$ также равны по гипотенузе и катету, поэтому углы $C$ и $C_1$ этих треугольников равны. Следовательно, треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников ($AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$).

**268.** Сформулируйте и докажите признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

Решение. Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу (если, конечно, он имеет место) должен формулироваться так: если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника равен катету и противолежащему ему углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Рассмотрим прямоугольные треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами $A$ и $A_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Приложим треугольник $ABC$ к треугольнику $A_1B_1C_1$ (рис. 168) так, чтобы вершина $A$ совместилась с вершиной $A_1$, вершина $B$ — с $B_1$, а вершины $C$ и $C_1$ оказались по разные стороны от прямой $A_1B_1$. Поскольку углы $A$ и $A_1$ прямые, то точки $C$, $A_1$ и $C_1$ окажутся при этом лежащими на одной прямой.

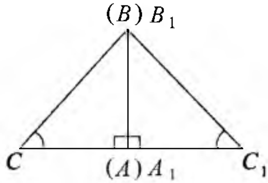

Рис. 168

В треугольнике $CB_1C_1$ углы $C$ и $C_1$ равны, поэтому этот треугольник равнобедренный: $B_1C = B_1C_1$. Следовательно, треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны по гипотенузе и катету.

**269.** Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $BH = B_1H_1$, где $BH$ и $B_1H_1$ — высоты треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$.

Решение. Прямоугольные треугольники $ABH$ и $A_1B_1H_1$ (рис. 169) равны по катету и противолежащему углу (задача 268),

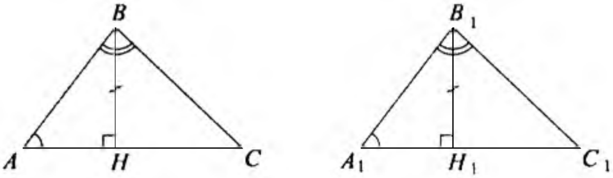

Рис. 169

поэтому $AB = A_1B_1$. Следовательно, треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников.

**270.** Внутри угла дана точка $A$. Постройте прямую, проходящую через точку $A$ и отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

Решение. Построим сначала биссектрису данного угла (рис. 170), а затем через точку $A$ проведем прямую, перпендикулярную к этой биссектрисе. Проведенная прямая — искомая.

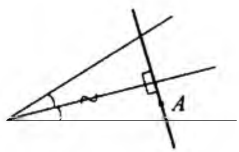

Рис. 170

## § 4. Построение треугольника по трем элементам

**271.** Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, сумма длин которых равна 17 см, а разность длин равна 1 см. Найдите расстояние от точки до прямой.

Решение. Пусть $x$ — искомое расстояние, или, что то же самое, длина проведенного перпендикуляра. Поскольку перпендикуляр меньше наклонной, то длина наклонной равна $x+1$ см. Следовательно, $x+x+1$ см $=17$ см, откуда $x=8$ см.

Ответ. 8 см.

**272.** В равностороннем треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AD$. Расстояние от точки $D$ до прямой $AC$ равно 6 см. Найдите расстояние от вершины $A$ до прямой $BC$.

Решение. Биссектриса равностороннего треугольника является высотой, поэтому искомое расстояние — это длина отрезка $AD$. Проведем из точки $D$ перпендикуляр $DE$ к прямой $AC$ (рис. 171). По условию $DE=6$ см. Учитывая, что отрезок $DE$ является катетом прямоугольного треугольника $ADE$, лежащим против угла в 30°, получим: $AD=2\cdot 6$ см $=12$ см.

Ответ. 12 см.

**273.** Сумма гипотенузы $CE$ и катета $CD$ прямоугольного треугольника $CDE$ равна 31 см, а их разность равна 3 см. Найдите расстояние от вершины $C$ до прямой $DE$.

Решение. Пусть $x$ — искомое расстояние, равное, очевидно, длине катета $CD$ (рис. 172). Поскольку катет меньше гипотенузы, то гипотенуза равна $x+3$ см. Следовательно, $x+x+3$ см $=31$ см, откуда $x=14$ см.

Ответ. 14 см.

**274.** Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от боковых сторон.

Решение. Пусть $M$ — середина основания $AB$ равнобедренного треугольника $ABC$ (рис. 173), $MH$ и $MK$ — перпендикуляры, про-

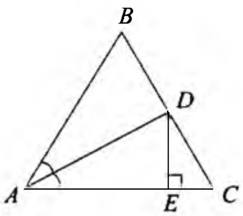


Рис. 171

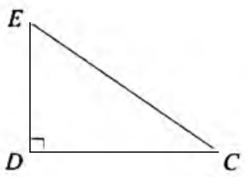


Рис. 172

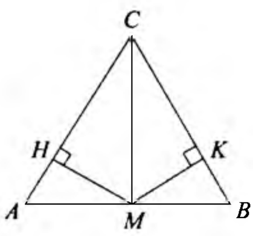


Рис. 173

веденные из точки $M$ к прямым $AC$ и $BC$. Поскольку отрезок $CM$ является медианой равнобедренного треугольника, а значит, и его биссектрисой, то $\angle HCM = \angle KCM$. Следовательно, прямоугольные треугольники $HCM$ и $KCM$ равны по гипотенузе и острому углу, а значит, $MH = MK$.

**275.** На основании $AB$ равнобедренного треугольника $ABC$ взята точка $M$, равноудаленная от боковых сторон. Докажите, что $CM$ — высота треугольника $ABC$.

Решение. Пусть $MH$ и $MK$ — перпендикуляры, проведенные из точки $M$ к прямым $AC$ и $BC$ (см. рис. 173). Поскольку $MH = MK$, то прямоугольные треугольники $HCM$ и $KCM$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, отрезок $CM$ является биссектрисой треугольника $ABC$, а значит, и его высотой.

**276.** Через середину отрезка проведена прямая. Докажите, что концы отрезка равноудалены от этой прямой.

Решение. Пусть $M$ — середина отрезка $AB$ (рис. 174), $AA_1$ и $BB_1$ — перпендикуляры, проведенные из концов отрезка к данной прямой. Поскольку углы $AMA_1$ и $BMB_1$ равны как вертикальные углы, то прямоугольные треугольники $AA_1M$ и $BB_1M$ равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $AA_1 = BB_1$.

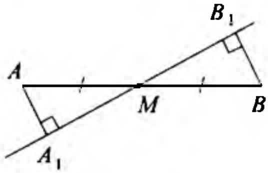

Рис. 174

**277.** Расстояние между параллельными прямыми $a$ и $b$ равно 3 см, а между параллельными прямыми $a$ и $c$ равно 5 см. Найдите расстояние между прямыми $b$ и $c$.

Решение. Если прямые $b$ и $c$ лежат по одну сторону от прямой $a$, то расстояние между ними равно 5 см − 3 см = 2 см; если же эти прямые лежат по разные стороны от прямой $a$, то расстояние между ними равно 5 см + 3 см = 8 см.

Ответ. 2 см или 8 см.

**278.** Прямая $AB$ параллельна прямой $CD$. Найдите расстояние между этими прямыми, если $\angle ADC = 30°$, $AD = 6$ см.

Решение. Пусть $AH$ — перпендикуляр, проведенный из точки $A$ к прямой $CD$ (рис. 175). Поскольку в прямоугольном треугольнике $ADH$ угол $D$ равен 30°, то $AH = \dfrac{AD}{2} = 3$ см.

Ответ. 3 см.

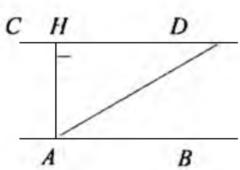

Рис. 175

**279*.** Докажите, что все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудаленные от нее, лежат на прямой, параллельной данной.

Решение. Пусть $a$ — данная прямая, $A$ — одна из тех точек, о которых идет речь в условии задачи, $d$ — расстояние от точки $A$ до прямой $a$. Проведем через точку $A$ прямую $b$, параллельную прямой $a$ (рис. 176). Требуется доказать, что если точки $A$ и $B$ лежат по одну сторону от прямой $a$, причем точка $B$ не лежит на прямой $b$, то расстояние от точки $B$ до прямой $a$ не равно $d$. Докажем это.

Проведем через точку $B$ прямую, перпендикулярную к $a$, и обозначим буквами $H$ и $K$ точки пересечения этой прямой с прямыми $a$ и $b$ соответственно. По теореме п. 37 $KH = d$, а поскольку точки $B$ и $K$ не совпадают (точка $B$ не лежит на прямой $b$), то $BH \neq d$. Но это и означает, что расстояние от точки $B$ до прямой $a$ не равно $d$.

**280.** Даны неразвернутый угол $ABC$ и отрезок $PQ$. Что представляет собой множество всех точек, лежащих внутри данного угла и удаленных от прямой $BC$ на расстояние $PQ$?

Решение. Все точки искомого множества лежат, очевидно, по ту же сторону от прямой $BC$, что и точка $A$. Выберем одну из них и проведем через нее прямую, параллельную $BC$ (рис. 177). По теореме п. 37 все точки этой прямой удалены на расстояние $PQ$ от прямой $BC$, а согласно утверждению задачи 279 все интересующие нас точки лежат на этой прямой. Таким образом, искомым множеством точек является часть указанной прямой, заключенная внутри угла $ABC$, т. е. луч с началом на стороне $AB$.

Ответ. Луч с началом на стороне $AB$, параллельный стороне $BC$.

**281.** Что представляет собой множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных параллельных прямых?

Решение. Пусть $d$ — расстояние между данными прямыми. Все точки искомого множества лежат, очевидно, между данными прямыми и удалены от них на расстояние $\frac{d}{2}$. Выберем одну из них и проведем через нее прямую, параллельную данным. По теореме п. 37 все точки этой прямой равноудалены от данных прямых, а согласно утверждению

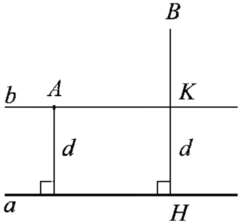


Рис. 176

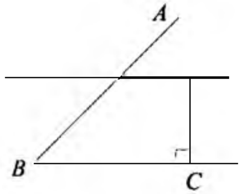


Рис. 177

задачи 279 точки, не лежащие на этой прямой, искомому множеству не принадлежат. Таким образом, проведенная прямая и является искомым множеством точек.

Ответ. Прямую, параллельную данным прямым и находящуюся на равных расстояниях от них.

**282.** Прямые $a$ и $b$ параллельны. Докажите, что середины всех отрезков $XY$, где $X \in a$, где $Y \in b$, лежат на прямой, параллельной прямым $a$ и $b$ и равноудаленной от этих прямых.

Решение. Проведем через середину $M$ отрезка $XY$ прямую, перпендикулярную к прямым $a$ и $b$ (рис. 178), и обозначим буквами $H$ и $K$ точки пересечения этой прямой с прямыми $a$ и $b$ соответственно. Прямоугольные треугольники $XHM$ и $YKM$ равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $MH = MK$. Следовательно, точка $M$ равноудалена от прямых $a$ и $b$, а значит, согласно результату задачи 281, лежит на прямой, параллельной прямым $a$ и $b$ и равноудаленной от этих прямых.

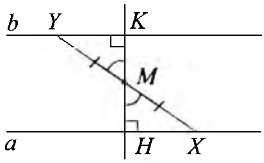


Рис. 178

**283.** Что представляет собой множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой?

Решение. Согласно теореме п. 37 и утверждению, сформулированному в задаче 279, множество всех точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от нее, представляет собой прямую, параллельную данной прямой. Поэтому искомым множеством точек являются две прямые, параллельные данной прямой и расположенные на данном расстоянии по разные стороны от нее.

Ответ. Две прямые, параллельные данной прямой и расположенные на данном расстоянии по разные стороны от нее.

## Задачи на построение

**285.** Даны пересекающиеся прямые $a$ и $b$ и отрезок $PQ$. На прямой $a$ постройте точку, удаленную от прямой $b$ на расстояние $PQ$.

Решение. Проведем прямую, параллельную прямой $b$ и удаленную от нее на расстояние $PQ$ (как это сделать, написано в решении задачи 284, см. учебник). Поскольку все точки этой прямой удалены от прямой $b$ на расстояние $PQ$, то точка ее пересечения с прямой $a$ — искомая. В соответствии с результатом задачи 283 данная задача имеет два решения.

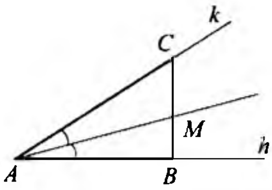


Рис. 179

**286.** Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла.

Решение. Построим угол $hk$, равный данному углу (рис. 179),и на луче $h$ от его начала $A$ отложим отрезок $AB$, равный данной стороне треугольника. Затем проведем биссектрису угла $hk$ и отложим на ней отрезок $AM$, равный данной биссектрисе. Наконец, проведем прямую $BM$ до пересечения с лучом $k$ в точке $C$. Треугольник $ABC$ — искомый.

**287.** Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к одной из двух других сторон, и углу между данными стороной и медианой.

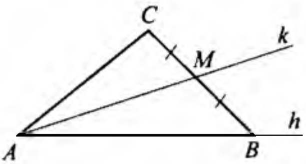


Рис. 180

Решение. Построим угол $hk$, равный данному углу (рис. 180), и на луче $h$ от его начала $A$ отложим отрезок $AB$, равный данной стороне треугольника, а на луче $k$ — отрезок $AM$, равный данной медиане. Затем проведем луч $BM$ и отложим на нем отрезок $MC = BM$. Наконец, соединим точки $A$ и $C$ отрезком. Треугольник $ABC$ — искомый.

**288.** Даны отрезок $PQ$ и угол $hk$. Постройте треугольник $ABC$ так, чтобы: а) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle hk$; б) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{4}\angle hk$.

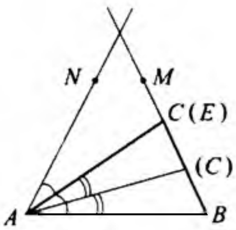


Рис. 181

Решение. а) Построим отрезок $AB = PQ$. От лучей $BA$ и $AB$ отложим углы $ABM$ и $BAN$, равные углу $hk$, так, чтобы точки $M$ и $N$ лежали по одну сторону от прямой $AB$ (рис. 181). Затем проведем биссектрису угла $BAN$ до пересечения с лучом $BM$ в точке $C$. Треугольник $ABC$ — искомый.

б) Выполним построение, описанное в решении части а) задачи, но точку $C$ обозначим иначе — например, буквой $E$. Затем проведем биссектрису угла $BAE$ до пересечения с лучом $BM$ в точке $C$. Треугольник $ABC$ — искомый.

**289.** Даны два угла $hk$ и $h_1k_1$ и отрезок $PQ$. Постройте треугольник $ABC$ так, чтобы $AB = PQ$, $\angle A = \angle hk$, $\angle B = \frac{1}{2}\angle h_1k_1$.

Решение. Построим отрезок $AB = PQ$. От лучей $BA$ и $AB$ отложим углы $ABM$ и $BAN$, равные соответственно углам $h_1k_1$ и $hk$, так, чтобы точки $M$ и $N$ лежали по одну сторону от прямой $AB$ (рис. 182). Затем проведем биссектрису угла $ABM$ до пересечения с лучом $AN$ в точке $C$. Треугольник $ABC$ — искомый.

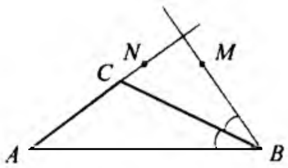

Рис. 182

**290.** Постройте прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и прилежащему к нему острому углу.

Решение. а) Построим сначала прямой угол с вершиной $A$, а затем на его сторонах отложим отрезки $AB$ и $AC$, равные данным катетам. Наконец, соединим точки $A$ и $C$ отрезком. Треугольник $ABC$ — искомый.

б) Построим отрезок $AB$, равный данному катету. Через точку $A$ проведем прямую, перпендикулярную к $AB$. От луча $BA$ отложим угол, равный данному углу, и продолжим его сторону до пересечения с проведенной прямой в точке $C$. Треугольник $ABC$ — искомый.

**291.** Постройте равнобедренный треугольник: а) по боковой стороне и углу, противолежащему основанию; б) по основанию и углу при основании; в) по боковой стороне и углу при основании; г) по основанию и боковой стороне; д) по основанию и медиане, проведенной к основанию.

Решение. а) Боковые стороны равнобедренного треугольника равны, поэтому задача сводится к построению треугольника по двум сторонам и углу между ними, а эта задача решена в учебнике.

б) Углы при основании равнобедренного треугольника равны, поэтому задача сводится к построению треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам, а такую задачу мы уже решали (см., например, решение задачи 288).

в) От произвольного луча $h$ отложим $\angle hk_1$, равный данному углу (рис. 183), а затем от луча $k_1$ отложим $\angle k_1k_2 = \angle hk_1$ и проведем луч $h_1$, являющийся продолжением луча $h$. Угол $h_1k_2$ равен, очевидно, углу, противолежащему основанию искомого треугольника. Таким образом, задача в) свелась к задаче а).

г) Боковые стороны равнобедренного треугольника равны, поэтому задача сводится к построению треугольника по трем сторонам, а эта задача решена в учебнике.

д) Построим отрезок $AB$, равный данному основанию, и найдем его середину $M$ (рис. 184). Поскольку медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой, то поступим так. Через точку $M$ проведем прямую, перпендикулярную к $AB$, и отложим на одном из ее лучей с началом $M$ отрезок $MC$, равный данной медиане. Треугольник $ABC$ — искомый.

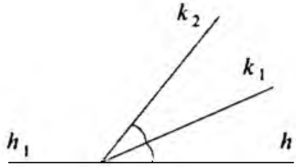


Рис. 183

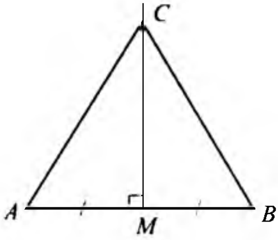


Рис. 184

**292.** Даны: отрезки $P_1Q_1$, $P_2Q_2$ и $P_3Q_3$. Постройте треугольник $ABC$ так, чтобы: а) $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = 2P_3Q_3$; б) $AB = 2P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = \frac{3}{2}P_3Q_3$. Всегда ли задача имеет решение?

Решение. а) Построим отрезок, равный $2P_3Q_3$. Теперь задача сводится к построению треугольника по трем сторонам, а эта задача решена в учебнике (она имеет решение не всегда).

б) Построим отрезки, равные $2P_1Q_1$ и $\frac{3}{2}P_3Q_3$. Теперь задача сводится к построению треугольника по трем сторонам, а эта задача решена в учебнике (она имеет решение не всегда).

Ответ. а) Не всегда; б) не всегда.

**294.** Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к одной из этих сторон.

Решение. Проведем произвольную прямую $a$ (рис. 185), а затем прямую $b$, параллельную прямой $a$ так, чтобы расстояние между прямыми $a$ и $b$ было равно данной высоте искомого треугольника (см. задачу 284). На прямой $a$ отметим точки $A$ и $B$ так, чтобы отрезок $AB$ был равен той из данных сторон, к которой проведена высота. Проведем теперь окружность с центром $A$, радиус которой равен второй из данных сторон, и обозначим через $C_1$ и $C_2$ точки пересечения этой окружности и прямой $b$. Каждый из треугольников $ABC_1$ и $ABC_2$ удовлетворяет условию задачи и тем самым является искомым.

Из построения ясно, что задача может иметь два решения (проведенная окружность пересекает прямую $b$ в двух точках,

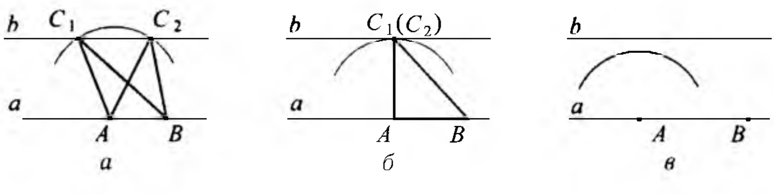


Рис. 185

см. рис. 185, *а*), одно решение (проведенная окружность пересекает прямую $b$ в одной точке, см. рис. 185, *б*) или не иметь ни одного решения (проведенная окружность не имеет общих точек с прямой $b$, см. рис. 185, *в*).

**295.** Постройте треугольник по двум сторонам и медиане к одной из этих сторон.

Решение. Построим отрезок $AB$, равный той из данных сторон, к которой проведена медиана, и найдем его середину $M$ (рис. 186). Затем построим треугольник $AMC$, сторона $AC$ которого равна второй из данных сторон, а $MC$ — данной медиане (задача о построении треугольника по трем сторонам решена в учебнике). Треугольник $ABC$ — искомый.

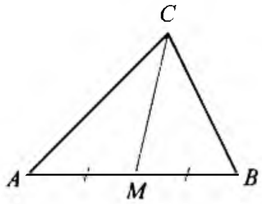

Рис. 186

## Дополнительные задачи

**296.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ биссектрисы равных углов $B$ и $C$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что угол $BOC$ равен внешнему углу треугольника при вершине $B$.

Решение. Пусть в треугольнике $ABC$ $\angle B = \angle C = \alpha$. Из треугольника $BOC$ (рис. 187) находим:

$$\angle BOC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \angle B,$$

что и требовалось доказать.

**297.** На стороне $AD$ треугольника $ADC$ отмечена точка $B$ так, что $BC = BD$. Докажите, что прямая $DC$ параллельна биссектрисе угла $ABC$.

Решение. Треугольник $BCD$ — равнобедренный (рис. 188), а угол $ABC$ — внешний угол этого треугольника при вершине, противоположной основанию. Поэтому биссектриса угла $ABC$ параллельна основанию $DC$ (см. задачу 233).

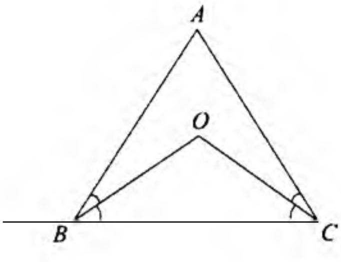

Рис. 187

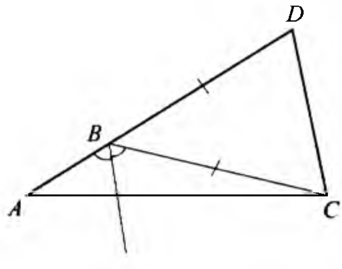

Рис. 188

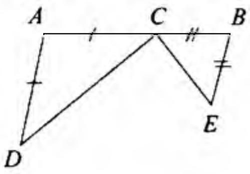

Рис. 189

**298.** На рисунке 189 (рис. 145 учебника) $AD \parallel BE$, $AC = AD$ и $BC = BE$. Докажите, что угол $DCE$ — прямой.

Решение. Поскольку треугольники $ADC$ и $BCE$ равнобедренные, то

$$DCE = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) - \\ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B).$$

Но углы $A$ и $B$ являются односторонними углами, образованными при пересечении параллельных прямых $AD$ и $BE$ секущей $AB$, поэтому $\angle A + \angle B = 180^\circ$, а значит, $\angle DCE = 90^\circ$.

**299.** На рисунке 190 (рис. 146 учебника) $AB = AC$, $AP = PQ = QR = RB = BC$. Найдите угол $A$.

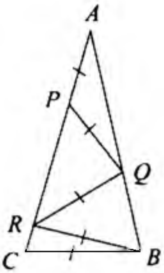

Рис. 190

Решение. Обозначим угол $A$ треугольника $ABC$ буквой $\alpha$. Треугольник $APQ$ — равнобедренный, и угол $RPQ$ — внешний угол этого треугольника, поэтому $\angle RPQ = 2\alpha$. Треугольник $RPQ$ также равнобедренный, а значит, $\angle PRQ = \angle RPQ = 2\alpha$.

Угол $BQR$ — внешний угол треугольника $AQR$, поэтому $\angle BQR = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$. Треугольник $BQR$ — равнобедренный, следовательно,

$$\angle RBQ = \angle BQR = 3\alpha.$$

Угол $BRC$ — внешний угол треугольника $ABR$, поэтому $\angle BRC = \alpha + 3\alpha = 4\alpha$, а поскольку треугольник $BCR$ равнобедренный, то $\angle BCR = \angle BRC = 4\alpha$.

Итак, в равнобедренном треугольнике $ABC$ $\angle A = \alpha$, $\angle B = \angle C = 4\alpha$. Имеем:

$$\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180^\circ, \text{ откуда } \alpha = 20^\circ.$$

Ответ. $20^\circ$.

**300.** Докажите, что в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведенной из вершины тупого угла, лежит на стороне треугольника, а основания высот, проведенных из вершин острых углов, — на продолжениях сторон.

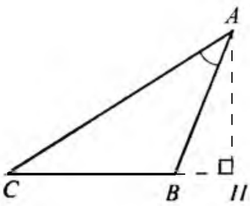

Рис. 191

Решение. Докажем сначала, что в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведенной из вершины тупого угла, лежит на стороне треугольника. Воспользуемся методом доказательства от противного. Рассмотрим треугольник $ABC$ с тупым углом $A$ и допустим, что основание его высоты $AH$ не лежит на стороне $BC$. Пусть, например, оно лежит на продолжении стороны $BC$ за точку $B$ (рис. 191). Поскольку в прямоугольном треугольнике $ABH$ угол $B$ острый, то смежный с ним угол $ABC$ тупой. Следовательно, в треугольнике $ABC$ два тупых угла: $A$ и $B$, чего не может быть. Это означает, что наше предположение неверно — точка $H$ не может лежать на продолжении стороны $BC$ за точку $B$. Аналогично доказывается, что точка $H$ не может лежать на продолжении стороны $BC$ за точку $C$, а значит, она лежит на стороне $BC$.

Докажем теперь, что в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведенной из вершины острого угла, лежит на продолжении стороны треугольника. Вновь воспользуемся методом доказательства от противного. Рассмотрим треугольник $ABC$ с тупым углом $B$ и допустим, что основание его высоты $AH$ лежит на стороне $BC$ (рис. 192). Тогда окажется, что в прямоугольном треугольнике $ABH$ угол $B$ — тупой, чего не может быть. Это означает, что наше предположение неверно — точка $H$ не может лежать на стороне $BC$, а значит, она лежит на продолжении этой стороны.

**301.** Из точки $A$ к прямой $a$ проведены перпендикуляр $AH$ и наклонные $AM_1$ и $AM_2$. Докажите что: а) если $HM_1 = HM_2$, то $AM_1 = AM_2$; б) если $HM_1 < HM_2$, то $AM_1 < AM_2$.

Р е ш е н и е. а) Прямоугольные треугольники $AHM_1$ и $AHM_2$ равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому их гипотенузы $AM_1$ и $AM_2$ равны.

б) Если точки $M_1$ и $M_2$ лежат по разные стороны от точки $H$, то на луче $HM_2$ отложим отрезок $HM_3 = HM_1$ (рис. 193); согласно доказанному в части а) $AM_3 = AM_1$. В противном случае примем за точку $M_3$ точку $M_1$.

Угол $AM_3M_2$ является внешним углом треугольника $AHM_3$, поэтому он больше прямого угла $H$ этого треугольника. Следовательно, в тупоугольном треугольнике $AM_3M_2$ сторона $AM_2$, лежащая против тупого угла, больше стороны $AM_3 = AM_1$, лежащей против острого угла.

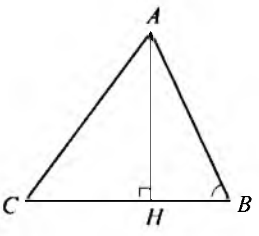


Рис. 192

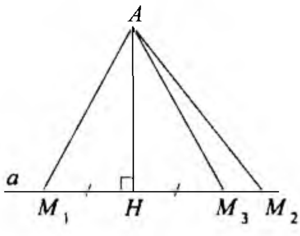


Рис. 193

**302.** Из точки $A$ к прямой $a$ проведены перпендикуляр $AH$ и наклонные $AM_1$ и $AM_2$. Докажите, что: а) если $AM_1 = AM_2$, то $HM_1 = HM_2$; б) если $AM_1 < AM_2$, то $HM_1 < HM_2$.

Решение. а) Допустим, что $HM_1 \neq HM_2$. Если $HM_1 < HM_2$, то, согласно задаче 301, $AM_1 < AM_2$; если же $HM_1 > HM_2$, то $AM_1 > AM_2$. И то, и другое противоречит условию. Следовательно, $HM_1 = HM_2$.

б) Допустим, что $HM_1 \geqslant HM_2$. Если $HM_1 = HM_2$, то, согласно задаче 301, а, $AM_1 = AM_2$; если же $HM_1 > HM_2$, то, согласно задаче 301, б, $AM_1 > AM_2$. И то и другое противоречит условию. Следовательно, $HM_1 < HM_2$.

**303*.** Два населенных пункта $A$ и $B$ находятся по одну сторону от прямой дороги. Где на дороге надо расположить автобусную остановку $C$, чтобы сумма расстояний $AC + CB$ была наименьшей?

Решение. Рассмотрим такую точку $A_1$, что дорога проходит через середину $M$ отрезка $AA_1$ и перпендикулярна к нему (рис. 194). Прямоугольные треугольники $AMC$ и $A_1MC$ равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому их гипотенузы $AC$ и $A_1C$ равны. Следовательно, $AC + CB = A_1C + CB$. Если точка $C$ не лежит на прямой $A_1B$, то $A_1C + CB > A_1B$ (неравенство треугольника); если же точка $C$ лежит на прямой $A_1B$, то $A_1C + CB = A_1B$. Таким образом, сумма $A_1C + CB$, а значит и сумма $AC + CB$, принимает наименьшее значение в том случае, когда точка $C$ представляет собой точку пересечения прямой $A_1B$ с дорогой.

Ответ. В точке пересечения дороги с отрезком $A_1B$, где $A_1$ — такая точка, что дорога проходит через середину отрезка $AA_1$ и перпендикулярна к нему.

**304*.** Докажите, что если точка $M$ лежит внутри треугольника $ABC$, то $MB + MC < AB + AC$.

Решение. Пусть $N$ — точка пересечения прямой $BM$ и отрезка $AC$ (рис. 195). Применяя теорему о неравенстве треугольника к треугольнику $ABN$, получим:

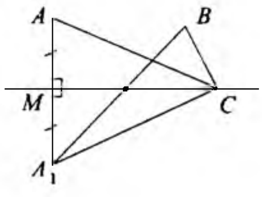

Рис. 194

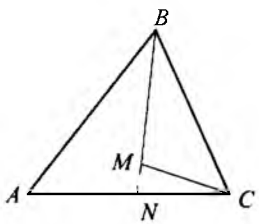

Рис. 195

$$BN = MB + MN < AB + AN,$$

откуда

$$MB < AB + AN - MN.$$

Применяя теорему о неравенстве треугольника к треугольнику $MNC$, получим:

$$MC < MN + NC.$$

Складывая полученные неравенства и учитывая, что $AN + NC = AC$, найдем:

$$MB + MC < AB + AC.$$

**305.** Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин меньше периметра треугольника.

Решение. Пусть $M$ — произвольная точка, лежащая внутри треугольника $ABC$. Согласно задаче 304,

$$MB + MC < AB + AC,$$
$$MC + MA < BC + BA$$

и

$$MA + MB < CA + CB.$$

Складывая эти неравенства и деля обе части полученного неравенства на 2, найдем:

$$MA + MB + MC < AB + BC + CA.$$

**306.** Докажите, что если $AB = AC + CB$, то точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой.

Решение. Допустим, что точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой. Применяя теорему о неравенстве треугольника к треугольнику $ABC$, получим:

$$AB < AC + CB.$$

Но это противоречит условию, а значит, точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой.

**307.** В прямоугольном треугольнике проведена высота из вершины прямого угла. Докажите, что данный треугольник и два образовавшихся треугольника имеют соответственно равные углы.

Решение. Каждый из образовавшихся прямоугольных треугольников имеет по одному общему острому углу с данным прямоугольным треугольником, поэтому другие их острые углы также соответственно равны углам данного прямоугольного треугольника.

**308.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$, равным 37 см, внешний угол при вершине $B$ равен $60°$. Найдите расстояние от вершины $C$ до прямой $AB$.

Решение. Поскольку внешний угол при вершине $B$ равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, равен сумме двух равных углов при основании (рис. 196), то каждый из них равен $30°$. Следовательно, высота $CH$ треугольника $ABC$, равная расстоянию от вершины $C$ до прямой $AB$, является катетом прямоугольного треугольника $ACH$ с гипотенузой $AC$, лежащим против угла в $30°$. Поэтому $CH = \frac{AC}{2} = 18{,}5$ см.

Ответ. 18,5 см.

**309.** В треугольнике с неравными сторонами $AB$ и $AC$ проведены высота $AH$ и биссектриса $AD$. Докажите, что угол $HAD$ равен полуразности углов $B$ и $C$.

Решение. Пусть, например, $AB > AC$ и, следовательно, $\angle C > \angle B$ (рис. 197). Угол $ADC$ является внешним углом треугольника $ABD$, поэтому

$$\angle ADC = \frac{\angle A}{2} + \angle B = \frac{180° - \angle B - \angle C}{2} + \angle B = 90° + \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2},$$

а значит,

$$\angle HAD = 90° - \left(90° + \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2}\right) = \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle B}{2}.$$

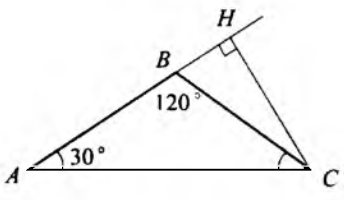

Рис. 196

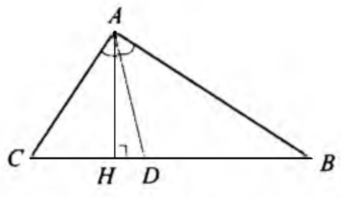

Рис. 197

**210.** Докажите, что в равных треугольниках высоты, проведенные к равным сторонам, равны.

Решение. Рассмотрим равные треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$, у которых, в частности, $AB = A_1B_1$ и $\angle B = \angle B_1$ (рис. 198). Пусть $AH$ и $A_1H_1$ — их высоты. Прямоугольные треугольники $ABH$ и $A_1B_1H_1$ равны по гипотенузе ($AB = A_1B_1$) и острому углу ($\angle B = \angle B_1$), поэтому $AH = A_1H_1$.

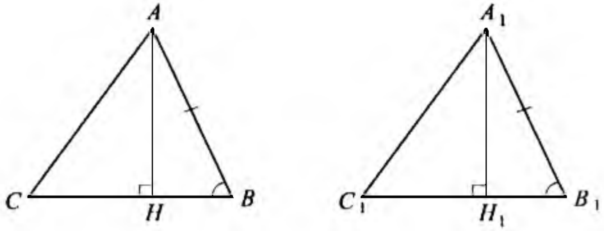


Рис. 198

**311.** Что представляет собой множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых?

Решение. Пусть $a$ и $b$ — данные прямые, пересекающиеся в точке $O$, $M$ — точка, равноудаленная от этих прямых (рис. 199). Проведем из точки $M$ перпендикуляры $MH_1$ и $MH_2$ к данным прямым. Поскольку $MH_1 = MH_2$, то прямоугольные треугольники $MOH_1$ и $MOH_2$ равны по гипотенузе и катету, а значит, луч $OM$ — биссектриса угла $H_1OH_2$.

Обратно, если точка $M$ лежит на биссектрисе одного из четырех углов, образованных при пересечении прямых $a$ и $b$, то перпендикуляры $MH_1$ и $MH_2$, проведенные к сторонам этого угла, равны, поскольку прямоугольные треугольники $MOH_1$ и $MOH_2$ равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, точка $M$ равноудалена от прямых $a$ и $b$.

Итак, искомое множество состоит из биссектрис четырех углов, образованных при пересечении данных прямых.

Ответ. Две прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых.

**312.** Отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Докажите, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.

Решение. Рассмотрим треугольник $ABC$, в котором $AC > AB$, и возьмем на его стороне $BC$ произвольную точку $M$ (рис. 200). Угол $AMC$ является внешним углом треугольника $ABM$, поэтому он больше угла $B$ этого треугольника. С другой стороны, $AC > AB$,

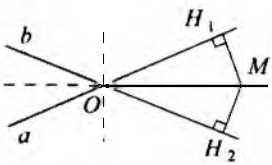


Рис. 199

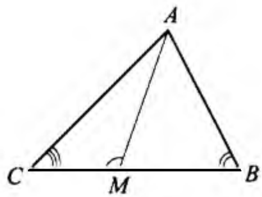


Рис. 200

следовательно, угол $B$ больше угла $C$. Таким образом, в треугольнике $AMC$ угол $M$ больше угла $C$, а значит, $AC > AM$.

**313*.** Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

Решение. На произвольной прямой отложим последовательно отрезки $BM$ и $MB_1$, равные данной медиане (рис. 201). Далее, построим треугольник $BCB_1$, стороны $BC$ и $B_1C$ которого равны данным сторонам искомого треугольника. Наконец, проведем отрезок $CM$ и продолжим его за точку $M$ на отрезок $MA = CM$. Поскольку треугольники $MCB_1$ и $MAB$ равны (по первому признаку равенства треугольников), то треугольник $ABC$ — искомый.

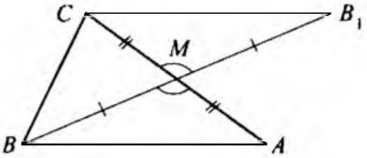

Рис. 201

**314.** Постройте прямоугольный треугольник: а) по гипотенузе и острому углу; б) катету и противолежащему углу; в) гипотенузе и катету.

Решение. а) Построим угол, равный данному углу, на одной из его сторон отложим от вершины отрезок, равный данной гипотенузе, и из конца этого отрезка проведем перпендикуляр к другой стороне угла. Построенный треугольник — искомый.

б) Построим угол $hk$, равный данному углу, и проведем ту прямую, параллельную $h$ и находящуюся от $h$ на расстоянии, равном данному катету (см. задачу 284), которая пересекает луч $k$. Из точки пересечения проведем перпендикуляр к лучу $h$. Построенный треугольник — искомый.

в) Построим прямой угол и отложим на одной из его сторон от вершины отрезок, равный данному катету. Затем проведем окружность радиуса, равного данной гипотенузе, с центром в конце этого отрезка. Соединим точку пересечения окружности и второй стороны прямого угла с ее центром. Построенный треугольник — искомый.

**315.** С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) $30°$; б) $60°$; в) $15°$; г) $120°$; д) $150°$; е) $135°$; ж) $165°$; з) $75°$; и) $105°$.

Решение. а) Построим равносторонний треугольник со стороной, равной произвольному отрезку. Каждый из его углов равен $60°$. Теперь проведем биссектрису одного из этих углов и получим угол, равный $30°$.

б) См. а).

в) Построим угол, равный $30°$ (см. а), и проведем его биссектрису. Получим угол, равный $15°$.

г) Построим угол, равный $60°$ (см. б). Тогда смежный с ним угол равен $120°$.

д) Построим угол, равный 30° (см. а). Тогда смежный с ним угол равен 150°.

е) Построим прямой угол и на его сторонах от вершины отложим равные отрезки. Соединяя концы этих отрезков, получим равнобедренный прямоугольный треугольник, углы при основании которого равны 45°. Углы, смежные с этими углами, равны 135°.

ж) Построим угол, равный 15° (см. в). Тогда смежный с ним угол равен 165°.

з) Построим угол, равный 150° (см. д), и проведем его биссектрису. Получим угол, равный 75°.

и) Построим угол, равный 75° (см. з). Тогда смежный с ним угол равен 105°.

**316*.** Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к ней, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон.

Решение. Построим отрезок $AB$, равный данной стороне (рис. 202), и проведем прямую $a$, параллельную прямой $AB$ и находящуюся от нее на расстоянии, равном данной высоте (см. задачу 293). Затем проведем прямую $b$, параллельную $AB$ и равноудаленную от прямых $AB$ и $a$. Далее построим окружность с центром $A$, радиус которой равен данной медиане, и отметим точку $M$ пересечения этой окружности с прямой $b$. Наконец, проведем прямую $BM$ до пересечения с прямой $a$ в точке $C$. Треугольник $ABC$ — искомый.

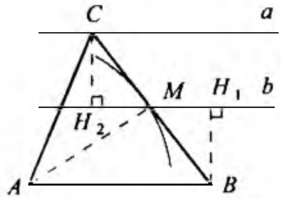

Рис. 202

В самом деле, проведем из точек $B$ и $C$ перпендикуляры $BH_1$ и $CH_2$ к прямой $b$ и рассмотрим прямоугольные треугольники $BMH_1$ и $CMH_2$. Углы $M$ этих треугольников равны как вертикальные углы, поэтому их углы $B$ и $C$ также равны. Катеты $BH_1$ и $CH_2$ этих треугольников равны по построению. Следовательно, рассматриваемые треугольники равны по первому признаку равенства треугольников, а значит, $BM = MC$, т. е. отрезок $AM$ — медиана треугольника $ABC$.

Из построения ясно, что задача может иметь два решения (рис. 203, *а*), одно решение (рис. 203, *б*) или не иметь решения (рис. 203, *в*).

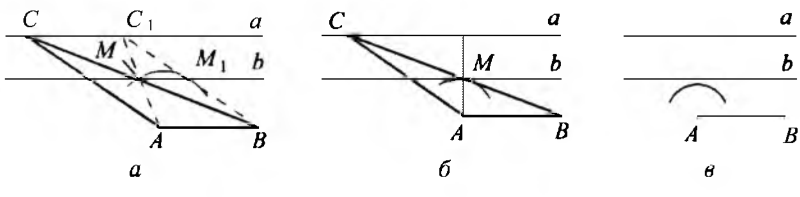

Рис. 203

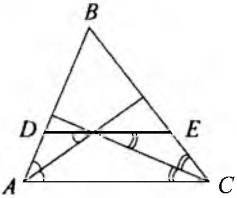


Рис. 204

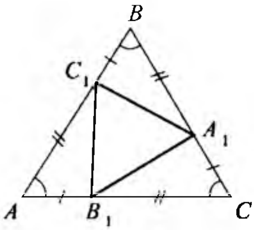


Рис. 205

**317.** Дан треугольник $ABC$. Постройте отрезок $DE$, параллельный прямой $AC$, так, чтобы точки $D$ и $E$ лежали на сторонах $AB$ и $BC$ и $DE = AD + CE$.

Решение. Построим биссектрисы углов $A$ и $C$ треугольника $ABC$ (рис. 204). Через точку пересечения этих биссектрис проведем прямую, параллельную $AC$, и отметим точки $D$ и $E$ пересечения этой прямой с прямыми $AB$ и $BC$. Отрезок $DE$ — искомый (см. задачу 245).

**318.** Даны равносторонний треугольник $ABC$ и точка $B_1$ на стороне $AC$. На сторонах $BC$ и $AB$ постройте точки $A_1$ и $C_1$ так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был равносторонним.

Решение. Отложим на сторонах $BC$ и $AB$ отрезки $CA_1$ и $BC_1$, равные $AB_1$ (рис. 205). Точки $A_1$ и $C_1$ — искомые, поскольку треугольники $AB_1C_1$, $A_1BC_1$ и $A_1B_1C$ равны по первому признаку равенства треугольников.

**319*.** Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла.

Решение. Построим сначала прямоугольный треугольник $ADH$ (рис. 206), гипотенуза $AD$ и катет $AH$ которого равны соответственно данной биссектрисе и данной высоте (см. задачу 314, в). Затем разделим данный угол пополам и отложим от луча $AD$ по обе стороны углы, равные половине данного угла. Точки пересечения сторон отложенных углов с прямой $DH$ обозначим буквами $B$ и $C$. Треугольник $ABC$ — искомый.

**320*.** Постройте треугольник по стороне, высоте и медиане, проведенным к этой стороне.

Решение. Построим отрезок $AB$, равный данной стороне, и найдем его середину $M$ (рис. 207). Проведем прямую, параллельную $AB$ и находящуюся от нее на расстоянии, равном данной высоте (см. задачу 284). Затем проведем окружность с центром $M$ радиуса, равного данной медиане, и обозначим буквой $C$ точку ее пересечения с проведенной прямой. Треугольник $ABC$ — искомый.

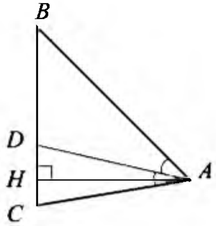


Рис. 206

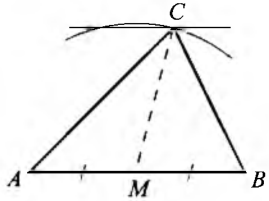


Рис. 207

**321***. Дан треугольник $ABC$ с прямым углом $A$. На стороне $AB$ постройте точку $M$, находящуюся на расстоянии $AM$ от прямой $BC$.

Решение. Проведем биссектрису угла $C$ (рис. 208). Точка $M$ ее пересечения с отрезком $AB$ — искомая. В самом деле, пусть $MH$ — перпендикуляр, проведенный из точки $M$ к прямой $BC$. Треугольники $ACM$ и $HCM$ равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $MA = MH$.

## Задачи повышенной трудности к главам 3 и 4

**333.** Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов при вершинах $B$ и $C$ треугольника $ABC$, пересекаются в точке $O$. Найдите угол $BOC$, если угол $A$ равен $\alpha$.

Решение. Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (см. задачу 83), поэтому $\angle OBC = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$, $\angle OCB = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$ (рис. 209), а значит,

$$\angle BOC = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\angle C}{2}\right) = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Ответ. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

**334.** Через каждую вершину данного треугольника проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе треугольника, исходящей из этой вершины.

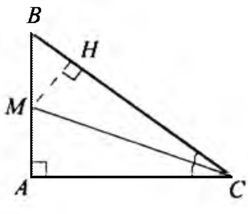


Рис. 208

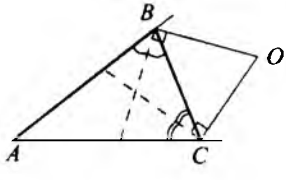


Рис. 209

Отрезки этих прямых вместе со сторонами данного треугольника образуют три треугольника. Докажите, что углы этих треугольников соответственно равны.

Решение. Пусть $ABC$ — данный треугольник. В ходе решения задачи 333 было установлено, что углы одного из трех образовавшихся треугольников равны $90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, $90^\circ - \frac{\angle B}{2}$ и $90^\circ - \frac{\angle C}{2}$. Аналогично доказывается, что углы двух других треугольников также равны

$$90^\circ - \frac{\angle A}{2}, \quad 90^\circ - \frac{\angle B}{2} \quad \text{и} \quad 90^\circ - \frac{\angle C}{2}.$$

**335.** В каждом из следующих случаев определите вид треугольника: а) сумма любых двух углов больше $90^\circ$; б) каждый угол меньше суммы двух других углов.

Решение. а) Сумма трех углов треугольника равна $180^\circ$, поэтому из условия задачи следует, что каждый угол треугольника меньше $90^\circ$, а значит, данный треугольник — остроугольный.

б) См. а).

Ответ. а) Остроугольный; б) остроугольный.

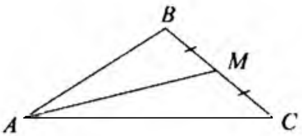

Рис. 210

**336.** Докажите, что угол треугольника является острым, прямым или тупым, если медиана, проведенная из вершины этого угла, соответственно больше, равна или меньше половины противоположной стороны.

Решение. Пусть $AM$ — медиана треугольника $ABC$ (рис. 210). Применяя теорему о соотношениях между сторонами и углами треугольника к треугольникам $ABM$ и $ACM$, получим, что если $AM > (=, <) BM$, то

$$\angle BAM < (=, >) \angle B \text{ и } \angle CAM < (=, >) \angle C,$$

а значит,

$$\angle A = \angle BAM + \angle CAM < (=, >) \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A,$$

откуда находим:

$$\angle A < (=, >) 90^\circ.$$

**337.** Внутри равнобедренного треугольника $ABC$ с основанием $BC$ взята точка $M$, такая, что $\angle MBC = 30^\circ$, $\angle MCB = 10^\circ$. Найдите угол $AMC$, если $\angle BAC = 80^\circ$.

Решение. Поскольку угол $A$ равнобедренного треугольника $ABC$ равен $80^\circ$, то

$$\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ.$$

Пусть $O$ — точка пересечения биссектрисы угла $A$ с прямой $BM$ (рис. 211). Треугольники $AOB$ и $AOC$ равны по первому признаку равенства треугольников. Поэтому

$$\angle ACO = \angle ABO = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ,$$
$$\angle AOB = \angle AOC = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ = 120^\circ.$$

Обратимся теперь к треугольникам $AOC$ и $MOC$. В этих треугольниках

$$\angle MOC = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ = \angle AOC,$$
$$\angle OCM = 50^\circ - 10^\circ - 20^\circ = 20^\circ = \angle OCA.$$

Следовательно, рассматриваемые треугольники равны по второму признаку равенства треугольников, а значит, $AC = MC$.

В равнобедренном треугольнике $ACM$ угол $C$, противоположный основанию $AM$, равен $40^\circ$, поэтому $\angle AMC = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Ответ. $70^\circ$.

**338.** Докажите, что любой отрезок с концами на разных сторонах треугольника не больше наибольшей из сторон треугольника.

Решение. Рассмотрим треугольник $ABC$, на сторонах $AB$ и $BC$ которого взяты точки $M$ и $N$ (рис. 212). Если одна из этих точек совпадает с вершиной $B$ или отрезок $MN$ совпадает со стороной $AC$, то утверждение, сформулированное в задаче, очевидно. Случай, когда один из концов отрезка $MN$ совпадает с вершиной $A$ или $C$, рассмотрен в задаче 312. Осталось рассмотреть случай, когда оба конца отрезка $MN$ не совпадают ни с одной из вершин треугольника.

В треугольнике $BMN$ один из углов — острый. Пусть, например, острым является угол $M$. Тогда смежный с ним угол $AMN$ — тупой. Согласно утверждению, сформулированному в задаче 312, отрезок $AN$ меньше большей из сторон $AB$ и $AC$. С другой стороны, этот отрезок лежит против тупого угла треугольника $AMN$, поэтому $MN < AN$. Следовательно, отрезок $MN$ также меньше большей из сторон $AB$ и $AC$, а значит, он меньше наибольшей из сторон треугольника $ABC$.

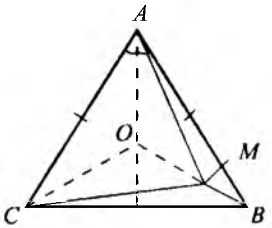


Рис. 211

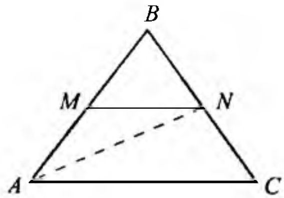


Рис. 212

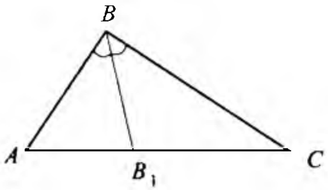


Рис. 213

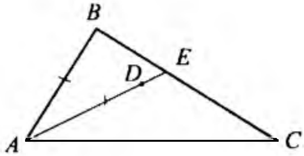


Рис. 214

**339.** Отрезок $BB_1$ — биссектриса треугольника $ABC$. Докажите, что $BA > B_1A$ и $BC > B_1C$.

Решение. Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним (см. задачу 173). Поэтому $\angle AB_1B > \frac{\angle B}{2}$ (рис. 213) и $\angle CB_1B > \frac{\angle B}{2}$. Применяя теорему о соотношениях между сторонами и углами треугольника к треугольникам $ABB_1$ и $CBB_1$, получим:

$$BA > B_1A \quad \text{и} \quad BC > B_1C.$$

**340.** Внутри треугольника $ABC$ взята точка $D$, такая, что $AD = AB$. Докажите, что $AC > AB$.

Решение. Пусть $E$ — точка пересечения прямой $AD$ и отрезка $BC$ (рис. 214). Поскольку точка $D$ лежит внутри треугольника $ABC$, то $AE > AD = AB$. С другой стороны, согласно утверждению, сформулированному в задаче 312, отрезок $AE$ меньше большего из отрезков $AB$ и $AC$. Следовательно, бо́льшим из этих отрезков является отрезок $AC$.

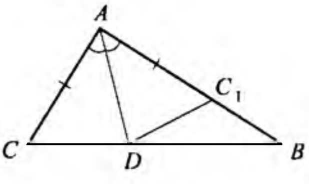


Рис. 215

**341.** В треугольнике $ABC$, в котором сторона $AB$ больше $AC$, проведена биссектриса $AD$. Докажите, что $\angle ADB > \angle ADC$ и $BD > CD$.

Решение. Отметим на стороне $AB$ такую точку $C_1$, что $AC_1 = AC$ (рис. 215). Треугольники $ADC$ и $ADC_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно,

$$\angle ADC = \angle ADC_1 < \angle ADB.$$

В треугольнике $BDC_1$ угол $C_1$ равен

$$180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B > \angle B,$$

поэтому $DB > C_1D = CD$.

**342.** Докажите теорему: *если в треугольнике биссектриса является медианой, то треугольник — равнобедренный.*

Решение. Рассмотрим треугольник $ABC$, биссектриса $AD$ которого является медианой: $BD = DC$. Допустим, что $AB > AC$.

Тогда согласно утверждению, сформулированному в задаче 341, $BD > DC$, что противоречит условию задачи. Предполагая, что $AB < AC$, мы придем к аналогичному противоречию. Следовательно, $AB = AC$.

**343.** Две стороны треугольника не равны друг другу. Докажите, что медиана, проведенная из их общей вершины, составляет с меньшей из сторон больший угол.

Решение. Рассмотрим треугольник $ABC$, в котором $BC < AB$. Продолжим его медиану $BM$ за точку $M$ на отрезок $ME = BM$ (рис. 216). Треугольники $BCM$ и $AEM$ равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $AE = BC$ и $\angle AEM = \angle CBM$.

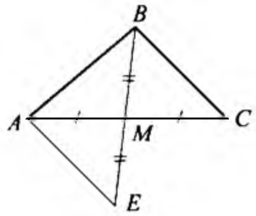

Рис. 216

В треугольнике $ABE$ сторона $AE = BC$ меньше стороны $AB$. Следовательно, угол $AEM$, а значит, и равный ему угол $CBM$, больше угла $ABM$.

**344.** В треугольнике $ABC$, где $AB \neq AC$, проведен отрезок $AM$, соединяющий вершину $A$ с произвольной точкой $M$ стороны $BC$. Докажите, что треугольники $AMB$ и $AMC$ не равны друг другу.

Решение. Если угол $AMB$ прямой (рис. 217, *а*), то смежный

Рис. 217

с ним угол $AMC$ также прямой. В этом случае прямоугольные треугольники $AMB$ и $AMC$ не равны друг другу, поскольку их гипотенузы $AB$ и $AC$ не равны друг другу.

Если угол $AMB$ тупой (рис. 217, *б*), то смежный с ним угол $AMC$ острый. Допустим, что треугольники $AMB$ и $AMC$ равны. Тогда треугольник $AMC$ — тупоугольный с тупым углом $A$ или $C$. Но углы $A$ и $C$ меньше тупого угла $M$ треугольника $AMB$ (см. задачу 173), поэтому тупоугольные треугольники $AMB$ и $AMC$ не могут быть равными друг другу.

Наконец, если угол $AMB$ острый, путем аналогичных рассуждений мы придем к тому же выводу.

**345.** Через вершину $A$ треугольника $ABC$ проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла $A$, а из вершины $B$ проведен перпендикуляр $BH$ к этой прямой. Докажите, что периметр треугольника $BCH$ больше периметра треугольника $ABC$.

Решение. Продолжим отрезок $BA$ за точку $A$ на отрезок $AD = AC$ (рис. 218). Каждый из углов $HAC$ и $HAD$ равен $90° + \frac{\angle A}{2}$, где $\angle A$ — угол треугольника $ABC$. Следовательно, треугольники $ACH$ и $ADH$ равны по первому признаку равенства треугольников, а значит, $CH = DH$.

Применяя теорему о неравенстве треугольника к треугольнику $BDH$, получим:

$$BH + DH > BD, \text{ или}$$
$$BH + CH > BA + AD = BA + AC,$$

откуда

$$BH + CH + BC > BA + AC + BC.$$

**346.** В треугольнике $ABC$, где $AB < AC$, проведены биссектриса $AD$ и высота $AH$. Докажите, что точка $H$ лежит на луче $DB$.

Решение. Из утверждения, сформулированного в задаче 341, следует, что угол $ADC$ тупой (рис. 219). Тем самым отрезок $AH$ является высотой тупоугольного треугольника $ADC$, проведенной из вершины острого угла. Поэтому согласно утверждению, сформулированному в задаче 300 (см. также решение этой задачи), точка $H$ лежит на луче $DB$.

**347.** Докажите, что в неравнобедренном треугольнике основание биссектрисы треугольника лежит между основаниями медианы и высоты, проведенных из этой же вершины.

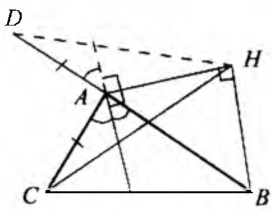


Рис. 218

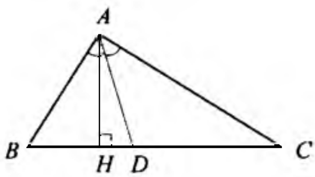


Рис. 219

Решение. Пусть $AD$, $AM$ и $AH$ — биссектриса, медиана и высота треугольника $ABC$, сторона $AB$ которого меньше $AC$ (рис. 220). Согласно утверждению, сформулированному в задаче 341, $CD > BD$, поэтому середина $M$ отрезка $BC$ лежит на луче $DC$. С другой стороны, точка $H$ лежит на луче $DB$ (см. задачу 346). Следовательно, точка $D$ лежит между точками $M$ и $H$.

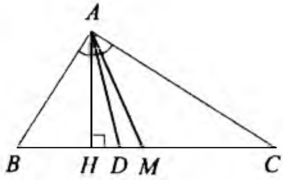

Рис. 220

**348.** Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведенными из той же вершины, пополам.

Решение. Пусть $AD$, $AM$ и $AH$ — биссектриса, медиана и высота треугольника $ABC$ с прямым углом $A$ (рис. 221). Из утверждения, сформулированного в задаче 336, следует, что $AM = BM$. В самом деле, если $AM < BM$, то угол $A$ тупой, а если $AM > BM$, то этот угол острый. И то и другое противоречит условию задачи, поэтому $AM = BM$.

Треугольник $ABM$ равнобедренный, поэтому углы при его основании $AB$ равны. В треугольнике $ABC$ углы $B$ и $C$ составляют в сумме $90°$, а в треугольнике $ACH$ углы $A$ и $C$ составляют в сумме $90°$. Следовательно, $\angle CAH = \angle MBA = \angle BAM$.

Биссектриса $AD$ делит пополам угол $BAC$, следовательно, она делит пополам и угол $MAH$.

**349.** Медиана и высота треугольника, проведенного из одной вершины угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Докажите, что треугольник — прямоугольный.

Решение. Пусть $AM$ и $AH$ — медиана и высота треугольника $ABC$, делящие угол $A$ на три равные части (рис. 222). Прямоугольные треугольники $ABH$ и $AMH$ равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $BH = HM = \frac{BC}{4}$.

Проведем из точки $M$ перпендикуляр $MD$ к прямой $AC$. Прямоугольные треугольники $AMH$ и $ADM$ равны по гипотенузе и острому углу, а значит, $DM = HM = \frac{BC}{4}$.

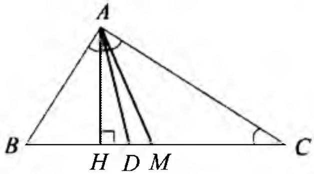

Рис. 221

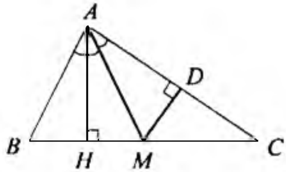

Рис. 222

В прямоугольном треугольнике $DMC$ катет $DM$ равен половине гипотенузы, поэтому угол $C$ равен $30°$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике $ACH$ угол $CAH$ равен $60°$, а значит, угол $A$ треугольника $ABC$ равен $\frac{3}{2} \cdot 60° = 90°$.

**350.** В треугольнике $ABC$ высота $AA_1$ не меньше стороны $BC$, а высота $BB_1$ не меньше стороны $AC$. Докажите, что треугольник $ABC$ — равнобедренный и прямоугольный.

Решение. Имеем: $AA_1 \geqslant BC$ (рис. 223, *а*). С другой стороны, поскольку гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катета, то $AC \geqslant AA_1$, причем знак равенства возможен только в том случае, когда точки $A_1$ и $C$ совпадают. Итак, $AC \geqslant AA_1 \geqslant BC$, причем знак равенства возможен только в том случае, когда точки $A_1$ и $C$ совпадают.

Аналогично получаем: $BC \geqslant BB_1 \geqslant AC$, причем знак равенства возможен только в том случае, когда точки $B_1$ и $C$ совпадают.

Неравенства $AC \geqslant BC$ и $BC \geqslant AC$ выполняются одновременно только тогда, когда $AC = BC$. Поэтому из условия задачи следует, что $AC = AA_1 = BC = BB_1$, причем точки $A_1$, $B_1$ и $C$ совпадают. Но это и означает, что треугольник $ABC$ — равнобедренный, а его угол $C$ — прямой (рис. 223, *б*).

**352.** Даны две точки $A$ и $B$ и прямая $a$, не проходящая через эти точки. На прямой $a$ постройте точку, равноудаленную от точек $A$ и $B$. Всегда ли задача имеет решение?

Решение. Через середину отрезка $AB$ проведем прямую $b$, перпендикулярную к этому отрезку (рис. 224, *а*). Точку пересечения прямых $a$ и $b$ обозначим буквой $C$. Точка $C$ лежит на прямой $a$ и равноудалена от точек $A$ и $B$ (см. задачу 160). Задача может иметь одно решение (если прямые $a$ и $b$ пересекаются, рис. 224, *а*), не иметь ни одного решения (если прямые $a$ и $b$ параллельны, рис. 224, *б*) или иметь бесконечно много решений (если прямые $a$ и $b$ совпадают, рис. 224, *в*).

Ответ. Не всегда.

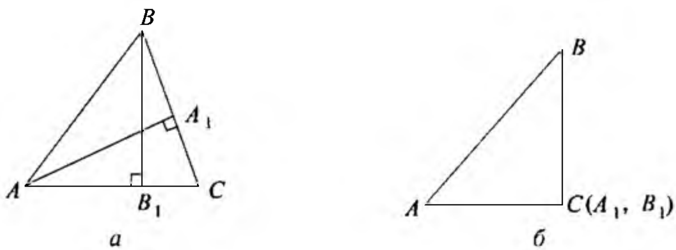


Рис. 223

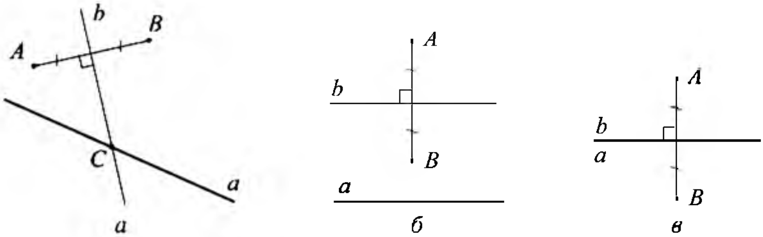


Рис. 224

**353.** Постройте точку, лежащую на данной окружности и равноудаленную от концов данного отрезка. Сколько решений может иметь задача?

Решение. Пусть даны отрезок $AB$ и окружность с центром $O$ (рис. 225). Через середину отрезка $AB$ проведем прямую $a$, перпендикулярную к этому отрезку (рис. 225, *а*). Одну из точек пересечения прямой $a$ с данной окружностью обозначим буквой $C$. Точка $C$ — искомая (см. задачу 160). Задача может иметь два решения (если прямая пересекает окружность в двух точках, рис. 225, *а*), одно решение (если прямая и окружность имеют одну общую точку, рис. 225, *б*), или не иметь ни одного решения (если прямая и окружность не имеют общих точек, рис. 225, *в*).

Ответ. Два, одно или ни одного.

**354.** Через три данные точки проведите окружность. Всегда ли задача имеет решение?

Решение. Пусть даны три точки $A$, $B$ и $C$ (рис. 226). Через середины отрезков $AB$ и $BC$ проведем прямые $a$ и $b$, перпендикулярные к этим отрезкам (рис. 226, *а*). Если точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой, то прямые $a$ и $b$ пересекаются в некоторой точке $O$. Эта точка равноудалена от концов отрезков $AB$ и $BC$ (см. задачу 160), т. е. равноудалена от точек $A$, $B$ и $C$. Поэтому окружность с центром $O$ радиуса $OA$ — искомая (рис. 226, *а*). Если же точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой, то прямые $a$ и $b$ параллельны. В этом случае задача решения не имеет (рис. 226, *б*).

Ответ. Не всегда.

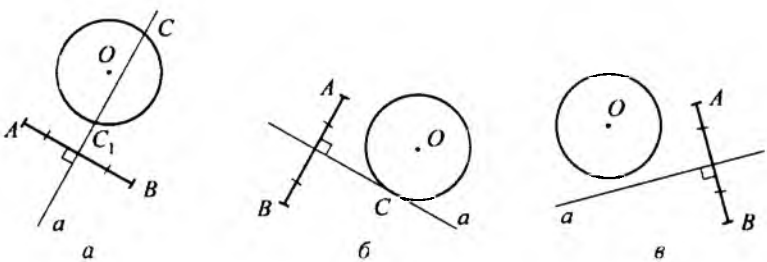


Рис. 225

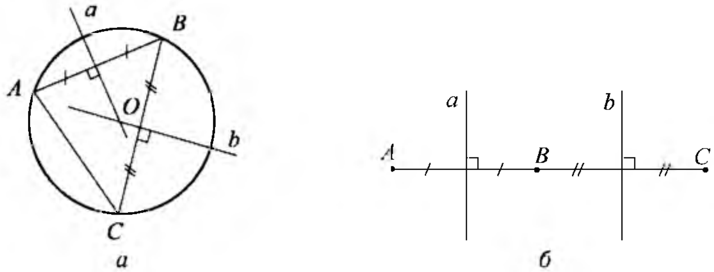


Рис. 226

**355.** Точки $A$ и $B$ лежат по одну сторону от прямой $a$. Постройте точку $M$ прямой $a$ так, чтобы сумма $AM + MB$ была меньше суммы $AX + XB$, где $X$ — любая точка прямой $a$, отличная от $M$.

Решение. Построим отрезок $AA_1$ так, чтобы данная прямая $a$ проходила через его середину и была перпендикулярна к нему (рис. 227). Тогда каждая точка $X$ прямой $a$ равноудалена от точек $A$ и $A_1$, то есть $AX = A_1X$ (см. задачу 160). Проведем прямую $A_1B$. Она пересечет прямую $a$ в некоторой точке $M$ (так как точки $B$ и $A_1$ лежат по разные стороны от прямой $a$). Точка $M$ — искомая. Действительно, пусть $X$ — произвольная точка прямой $a$, отличная от точки $M$. Тогда $A_1$, $X$ и $B$ не лежат на одной прямой и, следовательно, $A_1X + XB > A_1B$ (неравенство треугольника).

Но $A_1B = A_1M + MB = AM + MB$, $A_1X = AX$, поэтому

$$AM + MB < AX + XB.$$

**356.** Постройте прямоугольный треугольник $ABC$, если даны острый угол $B$ и биссектриса $BD$.

Решение. Пусть $hk$ — данный угол с вершиной $B$ (рис. 228). Построим сначала биссектрису этого угла и отложим на ней отрезок $BD$, равный данному отрезку. Затем построим прямую, проходящую через точку $D$ и перпендикулярную к лучу $h$. Обозначим точку пересечения этой прямой со сторонами угла $h$ и $k$ буквами $A$ и $C$. Треугольник $ABC$ — искомый.

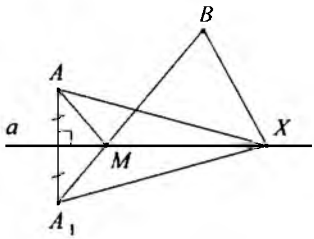


Рис. 227

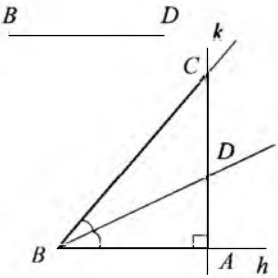


Рис. 228

**357.** На данной окружности постройте точку, равноудаленную от двух пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

Решение. Точки, равноудаленные от двух данных пересекающихся прямых, лежат на биссектрисах углов, образованных этими прямыми (задача 311). Поэтому если построить прямые $a$ и $b$, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми, то искомыми точками будут точки пересечения прямых $a$ и $b$ с данной окружностью. Задача может иметь четыре решения (рис. 229, *а*), три решения (рис. 229, *б*), два решения (рис. 229, *в*), одно решение (рис. 229, *г*) или не иметь ни одного решения (рис. 229, *д*).

Ответ. Четыре, три, два, одно или ни одного.

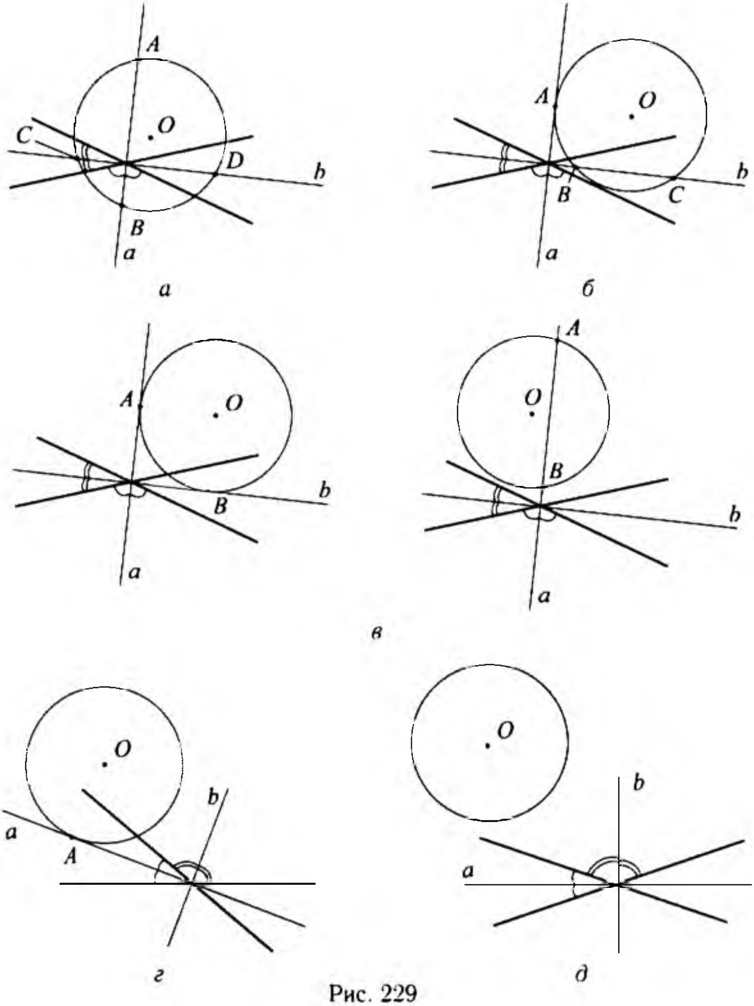


Рис. 229

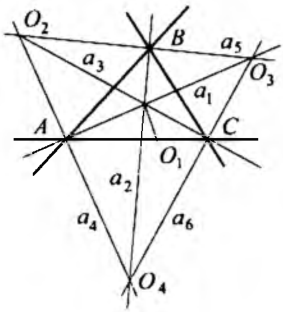


Рис. 230

**358.** Даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Постройте точку, равноудаленную от этих прямых. Сколько решений имеет задача?

Решение. Пусть $A$, $B$ и $C$ — точки, в которых попарно пересекаются данные прямые (рис. 230). Согласно задаче 311, искомой точкой является каждая из точек пересечения прямых, содержащих биссектрисы углов с вершинами $A$, $B$ и $C$, отличная от $A$, $B$ и $C$. Указанных прямых шесть: это прямые $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ на рисунке 230. Построим их. Они попарно пересекаются в четырех точках $O_1$, $O_2$, $O_3$ и $O_4$, отличных от $A$, $B$ и $C$. Каждая из этих четырех точек — искомая.

Ответ. Четыре.

**359.** Дана окружность с центром $O$ и точка $A$ вне ее. Проведите через точку $A$ прямую, пересекающую окружность в точках $B$ и $C$, таких, что $AB = BC$.

Решение. Построим треугольник $OAD$, в котором $AD = R$, $OD = 2R$, где $R$ — радиус данной окружности (рис. 231). Пусть $B$ — точка пересечения прямой $OD$ и данной окружности. Проведем прямую $AB$ и обозначим буквой $C$ вторую точку пересечения прямой $AB$ с данной окружностью. Прямая $AB$ — искомая. Действительно, равнобедренные треугольники $ABD$ и $CBO$ равны по первому признаку равенства треугольников: их боковые стороны равны по построению, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$, а значит, их углы при вершинах также равны. Следовательно, $AB = BC$.

**360.** Постройте треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведенной из вершины другого угла.

Решение. Пусть даны $\angle A$, высота $BH$ искомого треугольника $ABC$ и отрезок $PQ$, равный его периметру (рис. 232). Построим прямоугольный треугольник $ABH$ по острому углу $A$ и катету $BH$. На луче

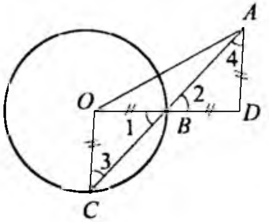


Рис. 231

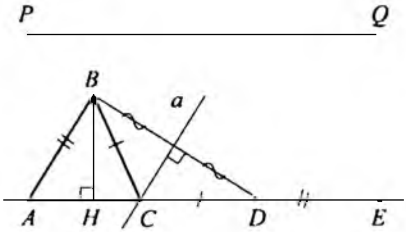


Рис. 232

$AH$ отложим отрезок $AE$, равный данному периметру, а затем на луче $EA$ отложим отрезок $ED = AB$. Через середину отрезка $BD$ проведем прямую $a$, перпендикулярную к $BD$, и точку пересечения прямой $a$ и прямой $AD$ обозначим буквой $C$. Треугольник $ABC$ — искомый.

Действительно, угол $A$ равен данному углу по построению, $BH$ — заданная высота, $BC = CD$ (см. задачу 160), $DE = AB$ по построению. Поэтому

$$PQ = AC + CD + DE = AC + BC + AB.$$

**361.** Постройте треугольник по периметру и двум углам.

Решение. Пусть даны $\angle h_1k_1$ и $\angle h_2k_2$, равные углам $A$ и $C$ искомого треугольника $ABC$, и отрезок $PQ$, равный его периметру (рис. 233, *а*). Построим треугольник $BDE$ по стороне $DE$, равной

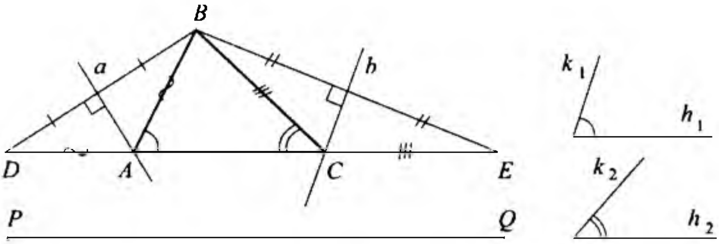


Рис. 233

отрезку $PQ$, и двум прилежащим к ней углам $\angle D = \dfrac{\angle h_1k_1}{2}$ и $\angle E = \dfrac{\angle h_2k_2}{2}$ (рис. 233, *б*). Затем через середины отрезков $BD$ и $BE$ проведем прямые $a$ и $b$, перпендикулярные к ним. Эти прямые пересекут прямую $DE$ в точках $A$ и $C$. Треугольник $ABC$ — искомый.

В самом деле, $AB = AD$, $BC = CE$, поэтому периметр треугольника $ABC$ равен отрезку $DE = PQ$. Далее, $\angle A = 2\angle D$, поскольку треугольник $ABD$ — равнобедренный. Следовательно, $\angle A = \angle h_1k_1$. Аналогично $\angle B = \angle h_2k_2$.

**362.** Постройте треугольник по стороне, разности углов при этой стороне и сумме двух других сторон.

Решение. Пусть $BC$, $AC + AB$ и $\alpha = \angle B - \angle C$ — данные элементы искомого треугольника $ABC$. Построим сначала треугольник $BCA_1$ по двум сторонам $BC$, $CA_1 = AC + AB$ и углу $A_1BC = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$ (рис. 234). Затем через

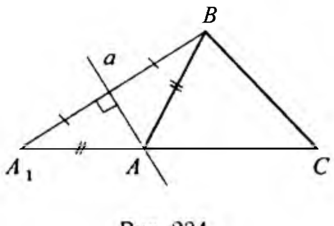


Рис. 234

середину отрезка $A_1B$ проведем прямую $a$, перпендикулярную к этому отрезку. Она пересечет прямую $A_1C$ в точке $A$. Треугольник $ABC$ — искомый. Действительно, угол $A_1AB$ —внешний угол треугольника $ABC$, поэтому

$$\angle A_1AB = \angle B + \angle C,$$

а значит,

$$\angle BA_1A = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2}.$$

Сумма углов треугольника $A_1BC$ равна $180^\circ$:

$$\left(90^\circ - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2}\right) + \angle C + \left(90^\circ + \frac{a}{2}\right) = 180^\circ,$$

откуда $\angle B - \angle C = \alpha$.